

تم تحميل وعرض المادة من

منهجي

mnhaji.com



موقع منهجي منصة تعليمية توفر كل ما يحتاجه المعلم
والطالب من حلول الكتب الدراسية وشرح للدروس
بأسلوب مبسط لكافة المراحل التعليمية وتوزيع
المناهج وتحضير وملخصات ونماذج اختبارات وأوراق
عمل جاهزة للطباعة والتحميل بشكل مجاني

حمل تطبيق منهجي ليصلك كل جديد





رياضيات 3

الفصل الدراسي الثالث

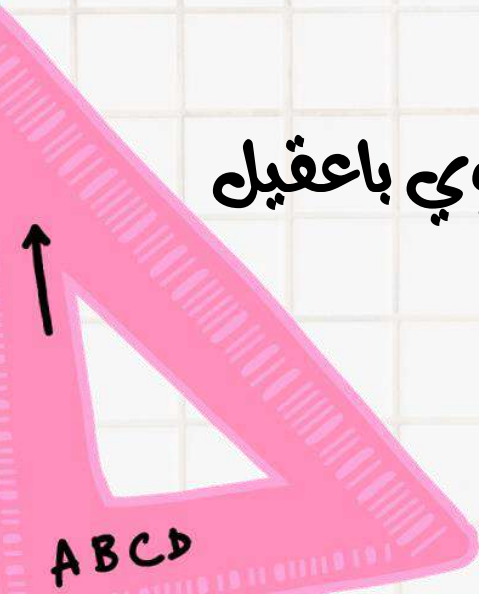
اسم الطالب/ة:

الصف:

إعداد المعلمتان:

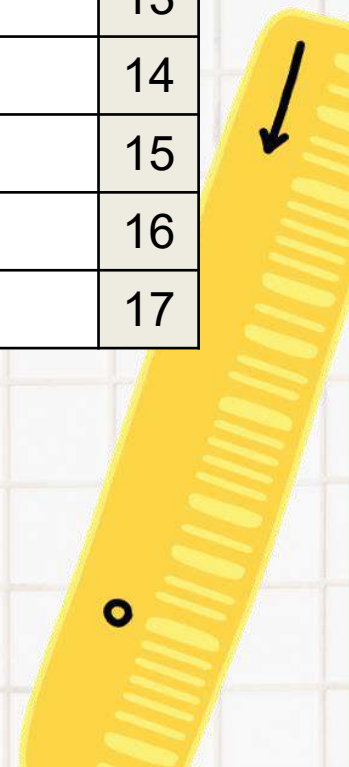
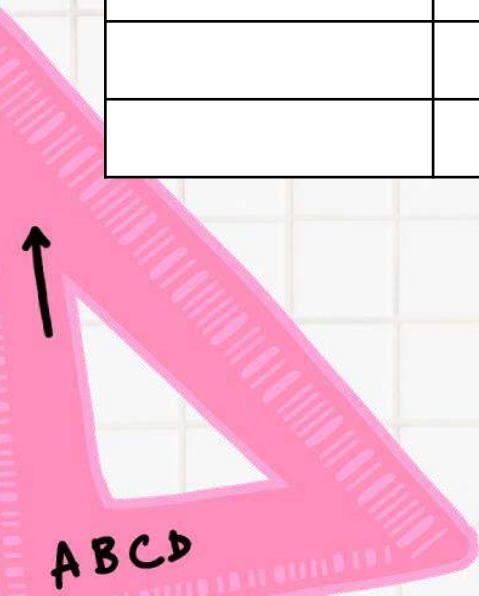
أ. وفاء علوي باعقيل

أ. هياء ناصر أجنوبي





م	التاريخ	الدرجة	الملاحظات	التوقيع
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				





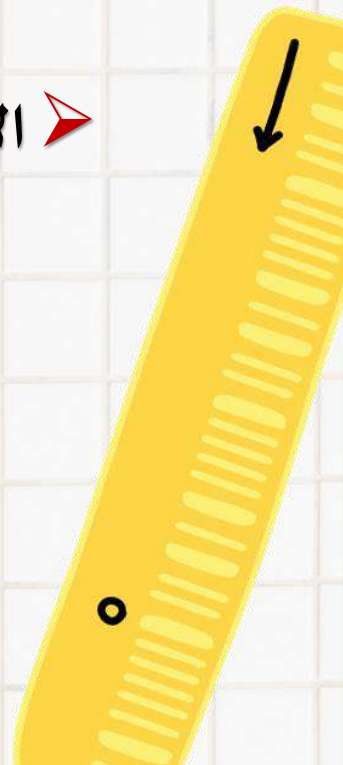
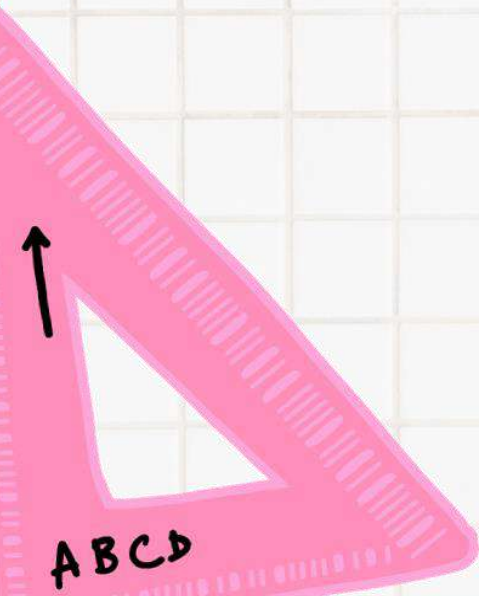
الفصل السادس

الإحداثيات القطبية و الأعداد المركبة

➤ الإحداثيات القطبية.

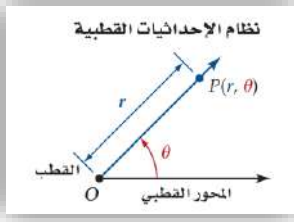
➤ الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات.

➤ الأعداد المركبة ونظرية ديموافر.



تمثيل الاحداثيات القطبية

1



تعيين موقع نقطة P في نظام الاحداثيات القطبية باستعمال الاحداثيات (θ, r) حيث: r المسافة المتجهة θ الزاوية المتجهة

المحور القطبي
نصف مستقيم يمتد أفقياً من القطب إلى اليمين

القطب
هو نقطة الأصل O نقطة ثابتة

مثل كل نقطة من النقاط التالية:

تحقق من فهمك: ص 269-



$F\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ (1C)

$E(2.5, 240^\circ)$ (1B)

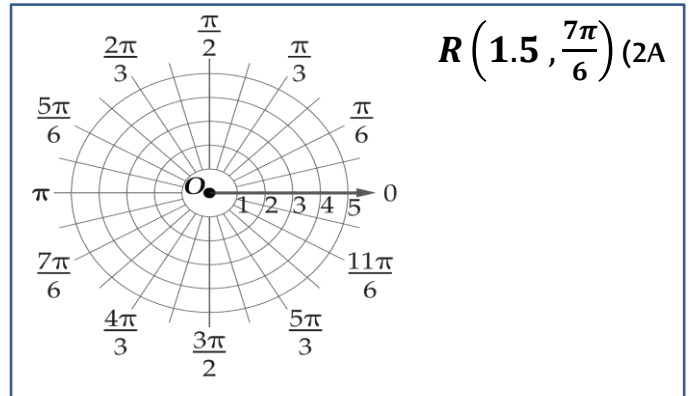
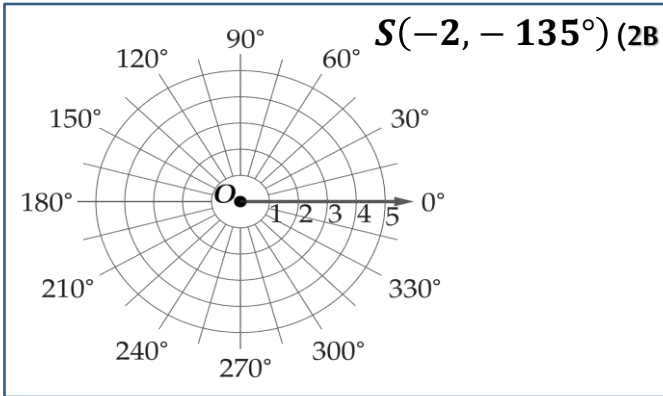
$D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ (1A)

تمثيل النقاط في المستوى القطبي:

2

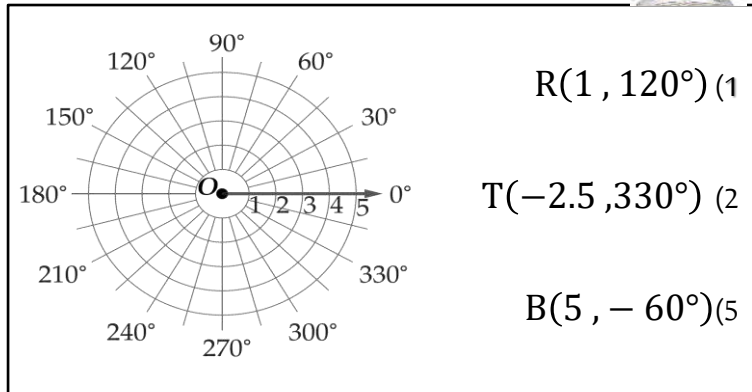
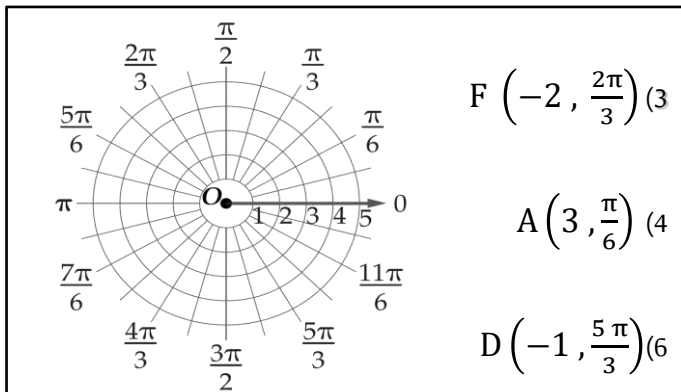
مثل كل نقطة من النقاط التالية في المستوى القطبي:

تحقق من فهمك: ص 269-



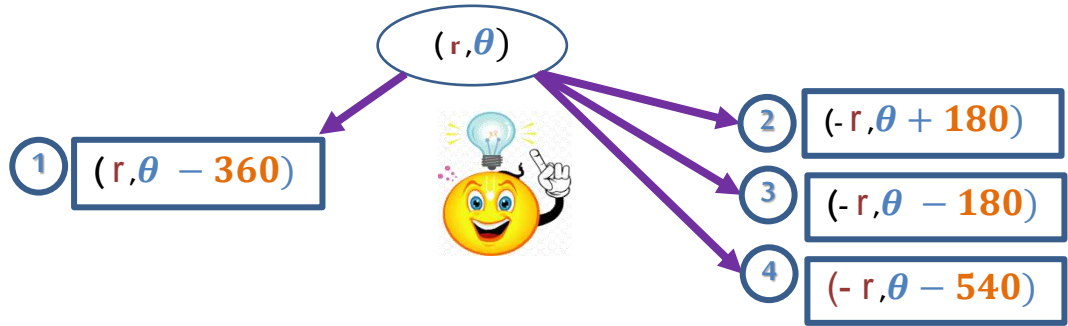
مثل كل نقطة من النقاط التالية في المستوى القطبي:

تدرب: ص 272-



تمثيلات قطبية متعددة:

3



أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاه ، علما بأن :
 $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi , -360^\circ \leq \theta \leq 360$

تحقق من فهمك : ص 270-



$(-2, \frac{\pi}{6})$ (3B)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$(5, 240^\circ)$ (3A)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاه ، علما بأن :
 $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi , -360^\circ \leq \theta \leq 360$

تدرب: ص 272-



$(-3, \frac{2\pi}{3})$ (15)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$(1, 150^\circ)$ (12)

.....

.....

.....

.....

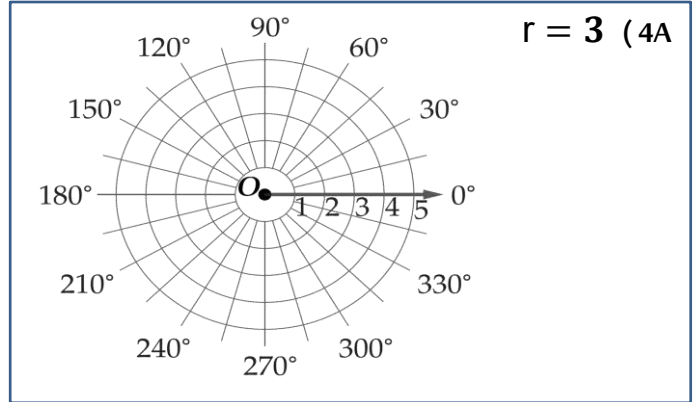
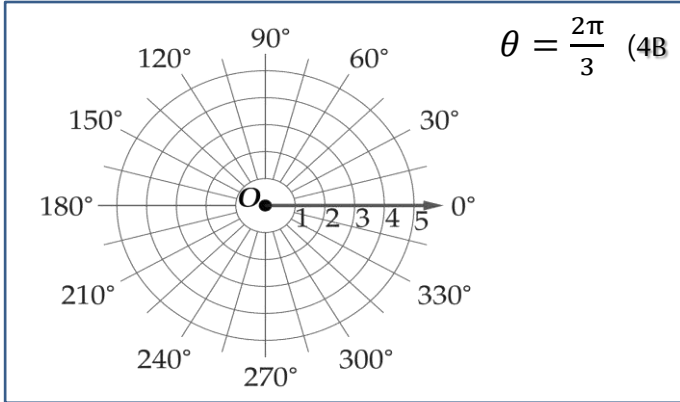
.....

.....



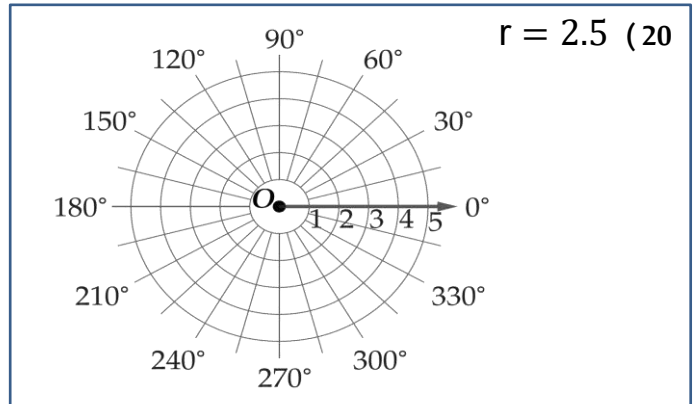
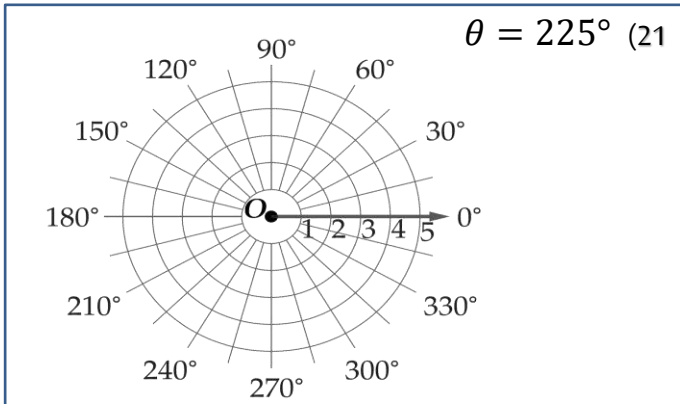
التمثيل البياني لمعادلة قطبية إما تكون دائرة أو خط مستقيم حيث :
 التمثيل البياني لـ r هو دائرة مركزها القطب وطول نصف قطرها $|r|$.
 التمثيل البياني لـ θ هو مستقيم يصنع زاوية مع محور القطب.

تحقق من فهمك : ص 271- مثل كل معادلة من المعادلات القطبية التالية بيانياً:



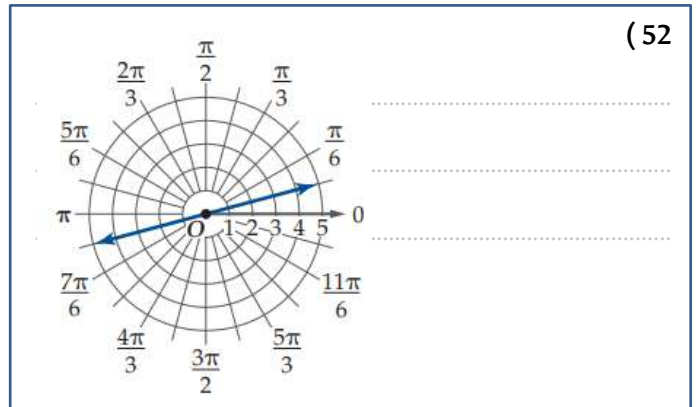
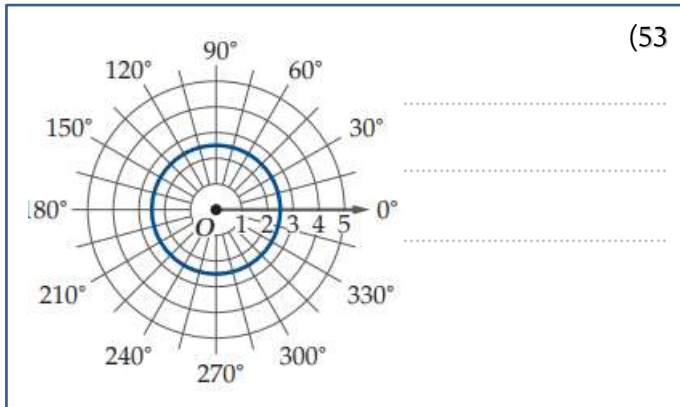
مثل كل معادلة من المعادلات القطبية التالية بيانياً:

تدرب: ص 272-



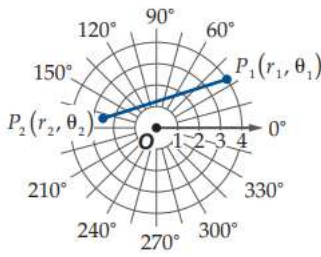
اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يلي:

تدرب: ص 273-



المسافة بالصيغة القطبية:

5



افترض أن نقطتان في المستوى القطبي، تعطى المسافة بالصيغة:

$$P_1 P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

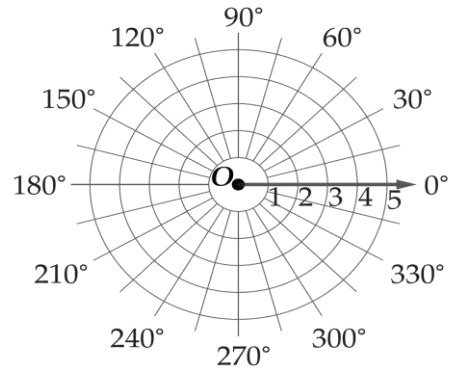
تحقق من فهمك: ص 271-



5) قوارب: يرصد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين: $(3, 65^\circ)$, $(8, 150^\circ)$ حيث r بالأميال.

5B) ما المسافة بين القاربين؟

5A) مثل هذا الموقف في المستوى القطبي.



أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط التالية:

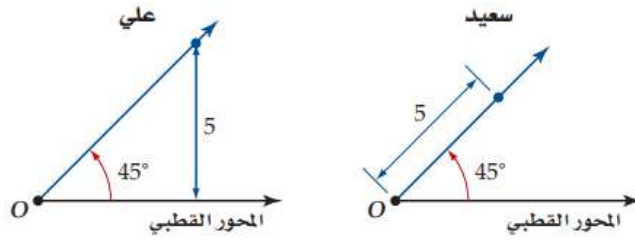
تدرب: ص 272-



26) $(3, \frac{\pi}{2})$, $(8, \frac{4\pi}{3})$

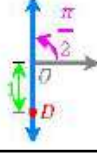
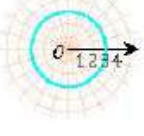
25) $(2, 30^\circ)$, $(5, 120^\circ)$

58) اكتشف الخطأ: قام كل من سعيد وعلي بتمثيل النقطة في المستوى القطبي كما هو مبين أدناه. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.



الواجب:

تحصيلي رياضيات

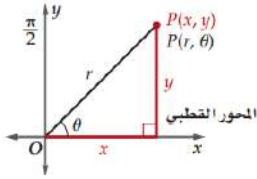
تمثيل النقطة D في الشكل هو				1
(1, $\frac{\pi}{2}$)	B	(-1, $\frac{\pi}{2}$)	A	
(0, $\frac{\pi}{2}$)	D	(-1, π)	C	
تمثيل النقطة (2, 50°) في المستوى القطبي هو نفسه تمثيل النقطة: هو				2
(2, 130°)	B	(50, 0°)	A	
(-2, 230°)	D	(-2, -50°)	C	
أي النقاط التالية يعد تمثيلاً آخر للنقطة $(-2, \frac{7\pi}{6})$ في المستوى القطبي؟				3
(-2, $\frac{\pi}{6}$)	B	(2, $\frac{\pi}{6}$)	A	
(-2, $\frac{11\pi}{6}$)	D	(2, $-\frac{11\pi}{6}$)	C	
الشكل يمثل المعادلة القطبية:				4
$r = 3$	B	$r = 2$	A	
$r = 6$	D	$r = 4$	C	
المعادلة القطبية $r = 4$ تمثيلها البياني عبارة عن دائرة طول قطرها ..				5
3	B	2	A	
8	D	4	C	
التمثيل البياني للمعادلة القطبية $\theta = 30^\circ$ عبارة عن ..				6
دائرة قطرها 30	B	دائرة قطرها 15	A	
مستقيم ميله $\sqrt{3}$	D	مستقيم ميله $\frac{\sqrt{3}}{3}$	C	
المسافة بين النقطتين $P_1 = (0, 40^\circ)$, $P_2 = (3, 60^\circ)$				7
3	B	0	A	
60	D	40	C	

تحصيلي رياضيات

إذا كانت المسافة بين النقطتين $p_1 = (r, 0^\circ), p_2 = (4, 90^\circ)$ تساوي 5 وحدات، فما قيمة ؟					
2	(B)		1	(A)	8
4	(D)		3	(C)	
أي المتجهات الآتية يمثل \overline{RS} حيث إن نقطة البداية $R(-5, 3)$ ونقطة النهاية $S(2, -7)$ ؟					
$\langle -3, 10 \rangle$	(B)		$\langle 7, -10 \rangle$	(A)	9
$\langle -3, -10 \rangle$	(D)		$\langle -3, 10 \rangle$	(C)	

1 تحويل الاحداثيات القطبية إلى الاحداثيات ديكارتية

$$(r, \theta) \rightarrow (x, y)$$



$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

حول الاحداثيات القطبية إلى احداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 276-



$$T(-3, 45^\circ) \text{ (1C)}$$

$$S\left(5, \frac{\pi}{3}\right) \text{ (1B)}$$

$$R(-6, 120^\circ) \text{ (1A)}$$

حول الاحداثيات القطبية إلى احداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

تدرب: ص 281-



$$(5, 240^\circ) \text{ (3)}$$

$$\left(2, \frac{\pi}{4}\right) \text{ (1)}$$

2 تحويل الاحداثيات الديكارتية إلى الاحداثيات القطبية

$$(x, y) \rightarrow (r, \theta)$$

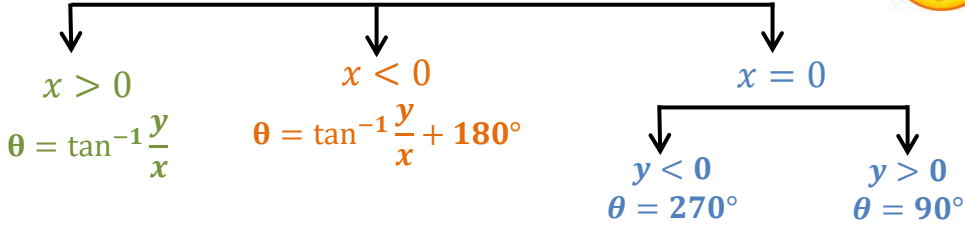
لايجاد θ

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$



لايجاد r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاه بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 277-



$W(-9, -4)$ (2B)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$V(8, 10)$ (2A)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حول الاحداثيات الديكارتية إلى احداثيات قطبية لكل نقطة مما يأتي:

تدرب: ص 281-



$(-13, 4)$ (12)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$(7, 10)$ (11)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التحويل بين الاحداثيات

3

تحقق من فهمك : ص 278-



3) صيد الأسماك : يستعمل جهاز رصد لتحديد مزق وجود الأسماك تحت الماء، افترض أن قارباً يتجه إلى الشرق ، وأن جهاز الرصد قد رصد سرباً من الأسماك عند النقطة $(6, 125^\circ)$ (A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

.....
.....
.....

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقاً عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(6, -2)$ فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

.....
.....
.....

تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

4

تحقق من فهمك : ص 279-



أكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (4B)$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9 \quad (4A)$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

أكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

تدرب: ص 281-



$$(x - 2)^2 + y^2 = 4 \quad (28)$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

$$x = -2 \quad (24)$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

دالة مثلثية $r =$
نضرب الطرفين في r

عدد $\theta =$
نأخذ $\tan \theta$ الطرفين

عدد $r =$
نربع الطرفين



أكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية:

تحقق من فهمك : ص 280-



$$r = 3 \cos \theta \quad (5C)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad (5B)$$

$$r = -3 \quad (5A)$$

أكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية:

تدرب: ص 281-



$$\tan \theta = 4 \quad (36)$$

$$r = 10 \quad (34)$$

$$r = 3 \sin \theta \quad (32)$$

58) اكتشف الخطأ: يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin \theta$ على الصورة الديكارتية فيعتقد توفيق

أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$ أيهما كانت اجابته صحيحة؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

61) برهان: استعمل $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ لإثبات أن :

$$r = x \sec \theta, r = \csc \theta$$

حيث: $\cos \theta \neq 0, \sin \theta \neq 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الواجب:



.....

.....

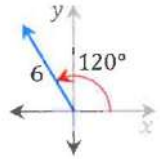
.....

.....

.....

.....

تحصيلي رياضيات

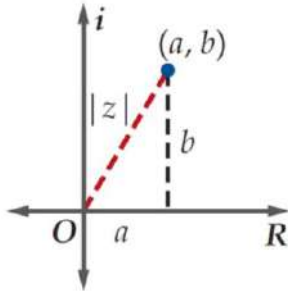
الصورة القطبية للمعادلة: $y^2 = x$				
$r = \tan\theta \sec\theta$	(B)		$r = \cot\theta \csc\theta$	(A)
$r = \cot\theta \sin\theta$	(D)		$r = \sin\theta \sec\theta$	(C)
المعادلة الديكارتية $x = 2$ بالصيغة القطبية:				
$r = 2\sin\theta$	(B)		$r = 2\cos\theta$	(A)
$r = 2\tan\theta$	(D)		$r = 2\sec\theta$	(C)
الإحداثيات الديكارتية للنقطة $T(-4, 60^\circ)$ هي:				
$(-2\sqrt{3}, -2)$	(B)		$(-2, -2\sqrt{3})$	(A)
$(2\sqrt{3}, 2)$	(D)		$(2, 2\sqrt{3})$	(C)
إذا كان $(5, \frac{\pi}{3})$ الإحداثي القطبي للنقطة p فما الإحداثي الديكارتية لها؟				
$(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$	(B)		$(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$	(A)
$(\frac{10}{\sqrt{3}}, 10)$	(D)		$(10, \frac{10}{\sqrt{3}})$	(C)
إذا كان للنقطة p الإحداثيات الديكارتية $(3, 3\sqrt{3})$ فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة p هي:				
$(6, 30^\circ)$	(B)		$(6, 60^\circ)$	(A)
$(6, 45^\circ)$	(D)		$(3, 90^\circ)$	(C)
				
أي العبارات التالية تمثل المتجه في الصورة الديكارتية؟				
$(-3, 3\sqrt{3})$	(B)		$(-3, -3\sqrt{3})$	(A)
$(3, 3\sqrt{3})$	(D)		$(3, -3\sqrt{3})$	(C)
الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $x^2 - y^2 = 3$ هي:				
$r^2 = 3 \sec 2\theta$	(B)		$r = 3 \cos 2\theta$	(A)
$r^2 = \frac{3}{\csc 2\theta}$	(D)		$r^2 = \frac{3}{\sec 2\theta}$	(C)

تحصيلي رياضيات

الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية: $r = 4\sin \theta$ هي :				
$x^2 + y^2 = 4y$	(B)		$x + y = 3x$	(A)
$x^2 = 4y^2$	(D)		$x^2 + y^2 = 4x$	(C)
أي من النقاط الآتية يعد تمثيلاً آخر للنقطة $(-2, \frac{7\pi}{6})$ في المستوى القطبي؟				
$(-2, \frac{\pi}{6})$	(B)		$(2, \frac{\pi}{6})$	(A)
$(-2, \frac{11\pi}{6})$	(D)		$(2, \frac{-11\pi}{6})$	(C)
إذا كان: $n = \langle -7, 3 \rangle, m = \langle 5, -4 \rangle$, فأى مما يأتي يمثل k , حيث $k = n - 2m$ ؟				
$(-17, -5)$	(B)		$(-17, 11)$	(A)
$(-17, 5)$	(D)		$(17, -11)$	(C)
ما الصورة القطبية للمعادلة: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ؟				
$r = 4\sin \theta$	(B)		$r = \sin \theta$	(A)
$r = 8\sin \theta$	(D)		$r = 2\sin \theta$	(C)
ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $v = \langle -1, -4, 2 \rangle, u = \langle 6, -1, -2 \rangle$ ؟				
$\langle -10, -10, 25 \rangle$	(B)		$\langle -10, 10, 25 \rangle$	(A)
$\langle -10, 10, -25 \rangle$	(D)		$\langle -10, -10, -25 \rangle$	(C)

تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمتها المطلقة

1



$$a + bi$$

الجزء الحقيقي

الجزء التخيلي

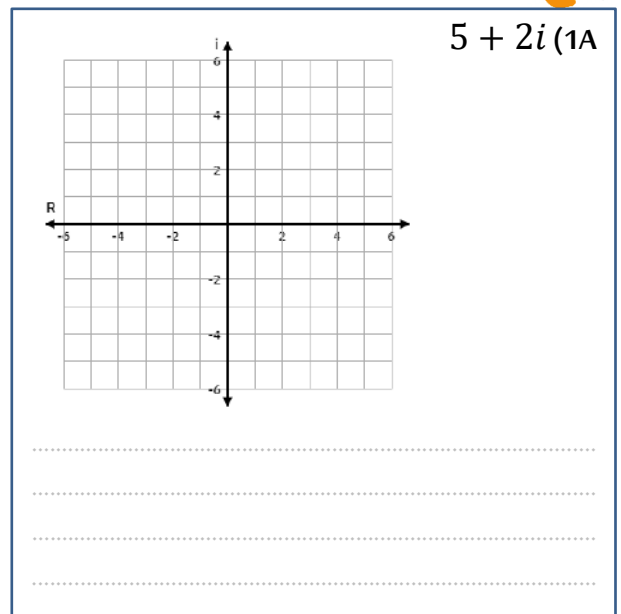
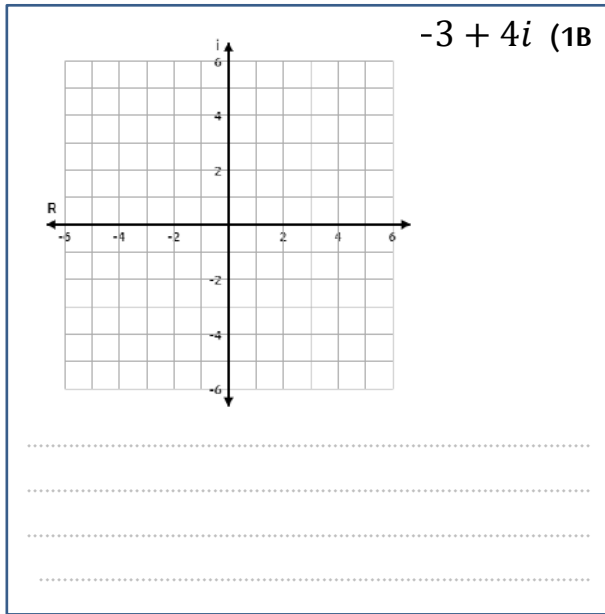


القيمة المطلقة لعدد المركب $z = a + bi$ هي:

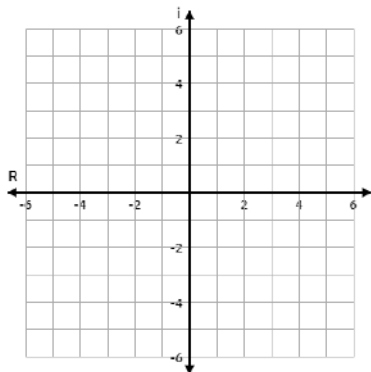
$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب ، وأوجد قيمته المطلقة:

تحقق من فهمك : ص 285-



تدرب: ص 292-



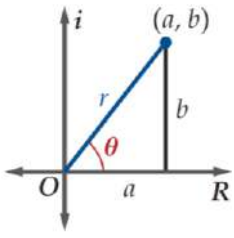
$-3 + i$ (2)

.....

.....

.....

.....



التحويل من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية حيث: $z = a + bi$

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

السعة θ

المقياس r

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a > 0$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$a < 0$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} + 180^\circ$$

$$a = 0$$

$$y < 0$$

$$\theta = 270^\circ$$

$$y > 0$$

$$\theta = 90^\circ$$



عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية

تحقق من فهمك: ص 286-



$$9 + 7i \text{ (2A)}$$

θ

r

الصورة القطبية للعدد: $9 + 7i$ هي:

$$-2 - 2i \text{ (2B)}$$

θ

r

الصورة القطبية للعدد: $-2 - 2i$ هي:

تدرب: ص 292-



$$4 + 4i \text{ (8)}$$

θ

r

الصورة القطبية للعدد: $4 + 4i$ هي:

تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية



التحويل من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية حيث:

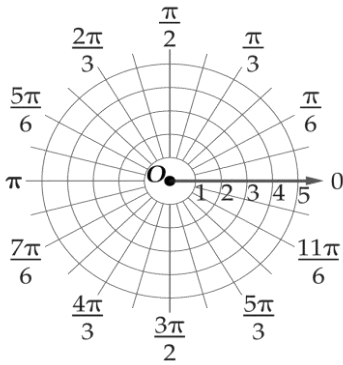
$$z = a + bi = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

مثل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي ، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

تحقق من فهمك : ص 286-



$$4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \quad (3B)$$



.....

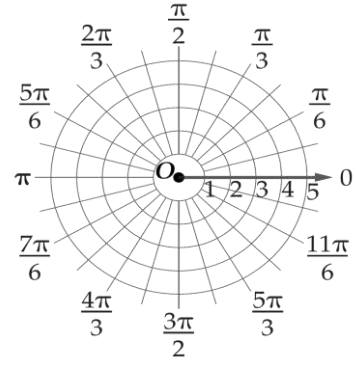
.....

.....

.....

.....

$$5 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad (3A)$$



.....

.....

.....

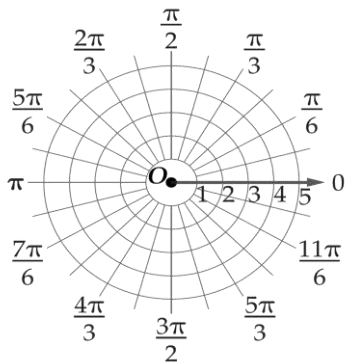
.....

.....

تدرب: ص 292-



$$4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (14)$$



.....

.....

.....

.....

.....

للعدين المركبين: $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$

صيغة الضرب: $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$



صيغة الضرب: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$

حيث: $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$

أوجد الناتج على الصورة القطبية ، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية لكل مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 287-



$$3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot 5(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad (4A)$$

$$6(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) \cdot 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \quad (4B)$$

تدرب: ص 292-



$$5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \cdot 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \quad (19)$$

5) قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

تحقق من فهمك : ص 288-



5) كهرباء إذا كان فرق جهد دائرة كهربائية $120 V$ ، وكانت شدة التيار $(8 + 6j)$ أمبير ، فأوجد معاومتها على الصورة الديكارتية

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب: ص 292-



$$4 \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) \div 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \quad (23)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6) نظرية ديموافر

إذا كان: $Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ عددا مركبا على الصورة القطبية ، وكان عددا صحيحا موجبا فإن :

$$z^n = [r (\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$



أوجد الناتج في كل مما يأتي ، وعبر عنه بالصورة الديكارتية:

تحقق من فهمك : ص 289-



$$(1 + \sqrt{3} i)^4 \quad (A6)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$(2\sqrt{3} - 2i)^8 \quad (6B)$$

تدرب: ص 292-



$$[4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})]^4 \quad (29)$$

7 جذور العدد المركب

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ فإن للعدد المركب $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن

إيجادها باستعمال الصيغة:

$$r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

حيث: $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

تحقق من فهمك: ص 290-



(7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2 + 2i$

(7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تدرب: ص 293-



(34) أوجد الجذور التربيعية للعدد $-2 - 4i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الجذور النونية للعدد واحد

8



- الجذور النونية المختلفة لأي عدد مركب جميعها لها المقياس نفسه ويساوي: $r^{\frac{1}{n}}$
- سعة الجذر الأول تساوي θ ثم تزداد الجذور الأخرى على التوالي بإضافة: $\frac{\theta}{n}$
- لإيجاد الجذور النونية للعدد 1 نضع العدد 1 على الصورة القطبية $1(\cos 0 + i \sin 0)$
- الجذور النونية المختلفة للعدد "واحد" جميعها لها المقياس نفسه ويساوي 1

تحقق من فهمك: ص 290-



(8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8B) أوجد الجذور السداسية للعدد واحد.

مهارات التفكير العليا: ص 293 _

42) اكتشف الخطأ: يحسب كل من أحمد وباسم قيمة $(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^5$ فيستعمل أحمد نظرية ديمو افر ويحصل على الإجابة

ويقول باسم بأن أحمد قد أنجز جزءا من المسألة فقط . أيهما إجابته صحيحة ؟ $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$

الواجب:

56) أي مما يأتي يمثل \overrightarrow{AB} وطوله ، إذا كان $A(3, 4, -2)$, $B(-5, 2, 1)$

$A. \langle -8, -2, 3 \rangle, \sqrt{77}$.C $\langle -8, -2, 3 \rangle, \sqrt{109}$

$B. \langle 8, -2, 3 \rangle, \sqrt{77}$.D $\langle 8, -2, 3 \rangle, \sqrt{109}$

57) ما المسافة بين النقطة $(-3, \frac{5\pi}{3})$ والنقطة $(6, \frac{\pi}{4})$ ؟

$A. 3.97$.C 5.97

$B. 4.97$.D 6.97

تحصيلي رياضيات

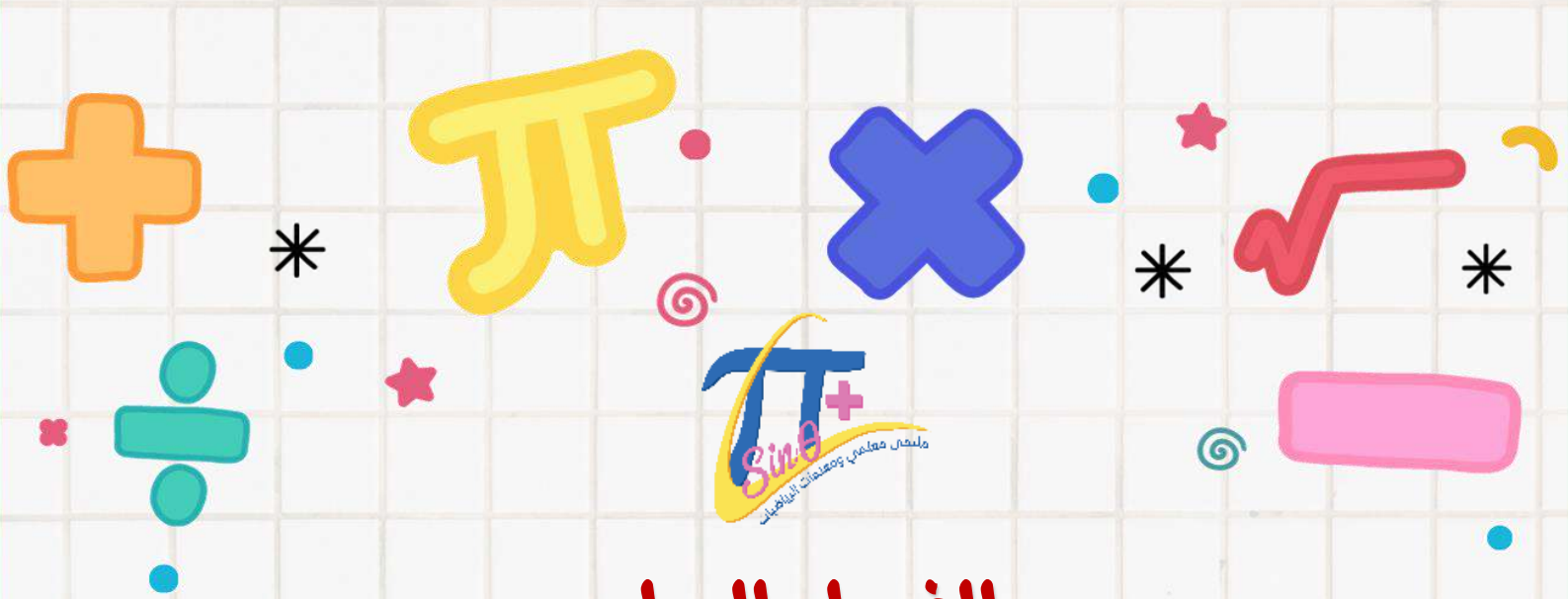
القيمة المطلقة للعدد المركب: $3 + 4i$				
3	(B)		2	(A)
5	(D)		4	(C)
عدد مركب مقياسه 3 وسعته 30° ، ما الصورة القطبية لهذا العدد؟				
$\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ$	(B)		$\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$	(A)
$3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$	(D)		$3(\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ)$	(C)
سعة العدد المركب $z = 7 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ تساوي:				
60°	(B)		30°	(A)
120°	(D)		90°	(C)
الصورة الديكارتية للعدد المركب $2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ هي:				
$2i\sqrt{2}$	(B)		$\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	(A)
$2 + 2i$	(D)		$2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$	(C)
قيمة المقدار $[2(\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^\circ)]^4$ تساوي:				
$-16i$	(B)		-16	(A)
$16i$	(D)		16	(C)
قيمة المقدار $[2(\cos 15^\circ + i \cos 75^\circ)]^6$ تساوي:				
-1	(B)		1	(A)
$-i$	(D)		i	(C)
إذا كان: $z_1 = 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ ، فما حاصل ضرب $z_1 z_2$ ؟				
$10 \left(\cos^2 \frac{\pi^2}{18} + i \sin^2 \frac{\pi^2}{18} \right)$	(B)		$10 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$	(A)
$10 \left(\cos^2 \frac{\pi^2}{18} - i \sin^2 \frac{\pi^2}{18} \right)$	(D)		$10 \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right)$	(C)

تحصيلي رياضيات

عند إيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب: $8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ ، ما مقياس الجذر الثاني؟				8
2	(B)	1	(A)	
8	(D)	4	(C)	
عند إيجاد الجذور الخماسية للعدد المركب: $3(\cos \pi + i \sin \pi)$ ، ما سعة الجذر الأول؟				9
$\frac{\pi}{3}$	(B)	$\frac{\pi}{5}$	(A)	
5π	(D)	π	(C)	
عند إيجاد الجذور الرباعية للعدد واحد فإن مقياس الجذر الثالث يساوي:				10
2	(B)	1	(A)	
4	(D)	3	(C)	
مقياس العدد المركب: $(i - 1)^8$				11
12	(B)	6	(A)	
16	(D)	8	(C)	
$(1 + i\sqrt{3})^6 = \dots$				12
$27\sqrt{3}$	(B)	27	(A)	
$64\sqrt{3}$	(D)	64	(C)	
نتاج ضرب: $5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$, $2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ على الصورة الديكارتية				13
10	(B)	-10	(A)	
$10 - i$	(D)	$10 + i$	(C)	
إذا كانت: $z_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$, $z_2 = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ فإن $\frac{z_1}{z_2}$				14
$1 - \sqrt{3}i$	(B)	$1 + \sqrt{3}i$	(A)	
$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$	(D)	$\frac{1}{3} (1 + \sqrt{3}i)$	(C)	

تحصيلي رياضيات

أي مما يأتي يمثل \overrightarrow{AB} وطوله ، إذا كان $A(3, 4, -2)$, $B(-5, 2, 1)$				15
$\langle 8, -2, 3 \rangle, \sqrt{77}$	(B)	$\langle -8, -2, 3 \rangle, \sqrt{77}$	(A)	
$\langle 8, -2, 3 \rangle, \sqrt{109}$	(D)	$\langle -8, -2, 3 \rangle, \sqrt{109}$	(C)	
ما المسافة بين النقطة $(-3, \frac{5\pi}{3})$ والنقطة $(6, \frac{\pi}{4})$ ؟				16
4.97	(B)	3.97	(A)	
6.97	(D)	5.97	(C)	
أي مما يأتي يمثل تقريبا الصورة القطبية للعدد المركب : $20 - 21i$ ؟				17
$29(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$	(B)	$29(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$	(A)	
$32(\cos 5.52 + i \sin 5.52)$	(D)	$32(\cos 5.47 + i \sin 5.47)$	(C)	



الفصل السابع

الاحتمال والإحصاء

❖ الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة.

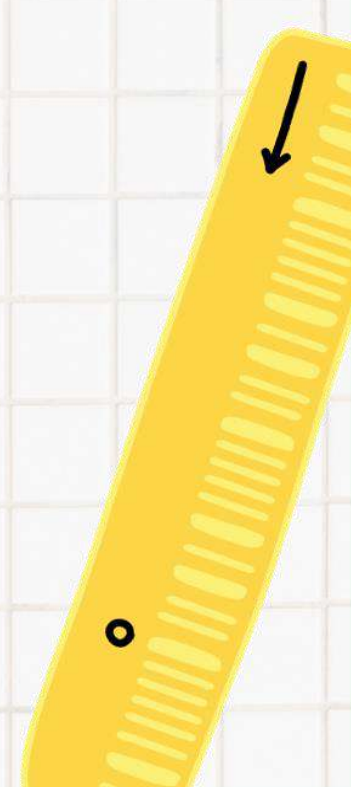
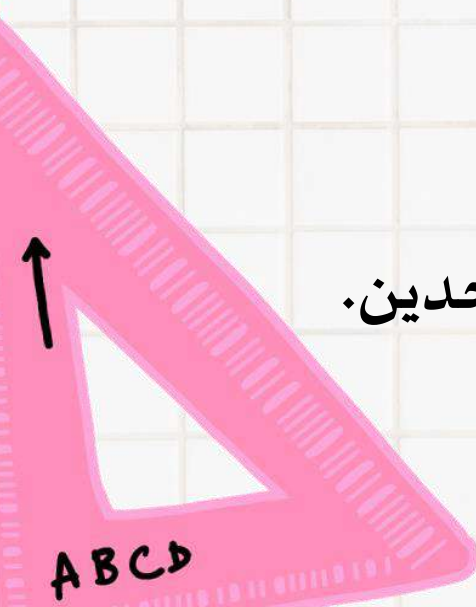
❖ التحليل الإحصائي

❖ الاحتمال المشروط.

❖ الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية.

❖ التوزيع الطبيعي.

❖ التوزيعات ذات الحدين.



1 العينات المتحيزة وغير المتحيزة

الدراسات المسحية (جمع البيانات)

العينة

إذا شملت عدد محدود من المجتمع

غير متحيزة

إذا تم اختيارها عشوائياً.

متحيزة

عندما يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام.

تعداد عام

إذا شملت جميع المجتمع



لتجنب التحيز في الدراسات المسحية المعتمدة على العينات لا بد من تحقق أمرين هما:
 ✓ العينة العشوائية مناسبة (غير متحيزة وحجمها كبير نسبياً)
 ✓ ألا تكون الأسئلة المطروحة متحيزة.

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية مما يلي تتبنى عينة متحيزة أم لا ، فسر اجابتك

تحقق من فهمك : ص 302-



1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائياً عن رياضتهم المفضلة.

1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

تدريب: ص 305-



1) استطلاع رأي كل ثالث شخص يخرج من مطعم للمشويات ، لمعرفة الوجبة المفضلة للناس.

2) الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد لديهم.

3) الاستفسار من الطالب الذي ترتيبه 20 من كل 20 طالبا يخرجون من مدرستك، عن الطالب الذي سيصوتون له في انتخابات المجلس الطلابي.

4) دراسة مسحية: بين ما إذا كانت الراسة المسحية الآتية تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة ، فسر اجابتك.
 " استطلاع آراء طلاب في كلية الطب، لمعرفة المهنة المستقبلية المفضلة لدى الشباب.

من أنواع الدراسات

التجريبية

إجراء معالجة خاصة للأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة

المجموعة الخاضعة

الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء الذين

لا يخضعون للمعالجة

أو يخضعون لمعالجة شكلية

المجموعة التجريبية

الأشخاص أو الحيوانات

أو الأشياء التي

تخضع للمعالجة

القائمة على الملاحظة

تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج



تُعطى المعالجة الشكلية لكي لا يعرف أفراد المجموعات لأي المجموعتين ينتمون، وتصبح الدراسة التجريبية عندها غير منحازة.

تحقق من فهمك: ص 303-



أي مما يأتي يحدد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب دون تحيز؟
 (2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟
 (2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟
 (2C) ما مادتك المفضلة؟

تدرب: ص 305-



(5) حدد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل:
 " يريد زاهر أن يحدد فريق كرة القدم الأكثر شعبية في المملكة"
 (a) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في مدينة الرياض؟
 (b) ما اسم فريق كرة القدم الذي تفضله في المملكة؟
 (c) ما مدى تقديرك لفريق كرة القدم في المملكة؟

الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة

متى نستخدم كل نوع من أنواع الدراسات؟

التجريبية

عند الرغبة في اختبار طريقة جديدة أو في دراسة نتائج معالجة مقصودة يؤثر الباحث بها في مجموعة من الأفراد يتم تعيينهم عشوائياً

القائمة على الملاحظة

عند الرغبة في دراسة أثر معالجة سابقة تعرض لها أفراد من المجتمع دون أي تأثير عليهم من الباحث

المسحية

عند الرغبة في جمع بيانات أو آراء أفراد المجتمع حول موضوع معين

تحقق من فهمك: ص 303-



حدد ما إذا كان الموقف الآتي يمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة ، وفي حال الدراسة التجريبية اذكر كل من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية ، ثم بين ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا .
3) اختر 80 طالبا جامعيا نصفهم درس الأحصاء في المدرسة الثانوية ، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه في الجامعة .

تدرب: ص 305-



حدد ما إذا كان الموقف الآتي يمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة ، وفي حال الدراسة التجريبية اذكر كل من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية ، ثم بين ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا .
8) قبل الاختبار قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه يشكل عشوائي ، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداهما ، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى . ثم قام بمقارنة نتائج الاختبار لهما .

9) وجد عادل 100 شخص ، نصفهم متطوعون في مأوى الفقراء ، وقارن بين متوسط الدخل السنوي لأفراد المجموعتين .

4 الدراسات المسحية التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة

4

تحقق من فهمك: ص 304-



حدد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية أو دراسة قائمة على الملاحظة ، فسر اجابتك
4) نريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1 (لا أو اقل مطلقا) إلى 5 (أو اقل وبشدة) .

تدرب: ص 305-



حدد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة أو دراسة مسحية ، وفسر اجابتك
13) تريد اختيار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال .

14) تريد استطلاع آراء أشخاص حول سياسة جديدة لشركة .

15) تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثر في حركة الركبة أو لا .

16) تريد معرفة ما إذا كانت المشروبات الغازية تؤثر في جدار المعدة أم لا .

17) تريد اختبار معالجة معينة تبعد الحيوانات عن البساتين التي تحوي غزلانا .

التمييز بين الارتباط والسببية

السببية

وقوع ظاهرة معينة، يكون سبباً مباشراً في وقوع الظاهرة الأخرى
لذا فإن السببية تتضمن الترتيب الزمني
(إذا لم يوجد سبب آخر يعطي النتيجة فإننا نفترض السببية)



الارتباط

عندما يوجد ارتباط بين ظاهرتين، فإن كلاً من الظاهرتين تؤثر في الأخرى

تحقق من فهمك : ص 304 -



بين ما إذا كانت العبارة الآتية تظهر ارتباطاً، أو سببية، ثم فسر إجابتك
(5A) عندما أدرس أحصل على ممتاز.

(5B) إذا صاحبت شخصاً حسن السيرة، فإنك تقتي بأخلاقه الحسنة.

تدرب: ص 305 -



بين ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطاً، أو سببية، ثم فسر إجابتك
(18) عندما أمارس الرياضة، أكون في وضع نفسي أفضل.

(19) عندما يكون الجو بارداً وممطراً بغزارة، لا نذهب إلى المدرسة.

(20) عندما يكون الطقس حاراً في فصل الصيف، يكثر بيع المشروبات الباردة.

(21) كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً.

(22) دلت البحوث على أن من يتقن أكثر من لغة، يكون أقل إمكانية للإصابة بالمرض.

(23) النوم بجذائك يؤدي إلى شعورك بالصداع.

25) اكتشف الخطأ: طُلب إلى كل من سامي وهشام أن يصمم دراسة تجريبية غير متحيزة ، هل وفق أي منهما في ذلك

هشام

- خذ 20 لاهبا لكرة القدم
- اطلب إلى نصفهم عشوائيا أن يقفوا 500
- قفزة إلى أعلى في اليوم
- قارن عدد مرات القفز إلى أعلى التي تستطيع
- كل مجموعة تنفيذها بعد الأسابيع الثلاثة

سامي

- خذ مجموعة من 20 شخصا بطريقة عشوائية
- اطلب إلى نصفهم عشوائيا الالتزام بحمية
- تعتمد على الفواكه لاكمال لمدة 3 أسابيع
- قارن بين أوزانهم بعد السابيع الثلاثة

تدرب على الاختبار: ص 306-

حدد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثل دراسة تجريبية أو دراسة قائمة على الملاحظة ، وإذا كانت الدراسة التجريبية اذكر كل من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية ، ثم بين ما إذا كانت متحيزة أم لا .

40) اختر 220 شخصا عشوائيا وقسمهم عشوائيا إلى مجموعتين إحداهما تقوم بالتدريبات الرياضية مدة ساعة واحدة يوميا والأخرى لا تقوم بهذه التدريبات ، قم قارن بين كتلة الجسم لكل من المجموعتين.

41) اختر 200 كمال ، نصفهم يمارس كرة القدم ، وقارن فترة النوم بين المجموعتين.

42) اختر 100 طالب جامعي ، نصفهم لديه وظيفة بدوام جزئي وقارن معدلاتهم التراكمية.

الواجب:

تحصيلي رياضيات

إذا اختير 200 طالب ، وتم تقسمهم عشوائيا إلى نصفين مع إخضاع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي وعدم إخضاع الأخرى لأي برنامج ، فما الدراسة المستخدمة				1
دراسة مسحية	(B)	تجريبية دراسة	(A)	
ارتباط	(D)	بالملاحظة دراسة	(C)	
ما الدراسة المستخدمة في معرفة ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنين يؤثر في سعة الرئة أم لا...				2
دراسة مسحية	(B)	تجريبية دراسة	(A)	
ارتباط	(D)	بالملاحظة دراسة	(C)	

مقاييس النزعة المركزية

1 مقاييس النزعة المركزية

المنوال

القيمة الأكثر تكرارا
أو شيوعا بين القيم
**تحتوي البيانات قيم مكررة



الوسيط

• إذا كان عدد القيم فردي: القيمة التي يكون ترتيبها في منتصف مجموعة البيانات بعد ترتيبها تنازليا أو تصاعديا
• أما إذا كان عددها زوجي نأخذ القيمتين اللتان تقعان في منتصف البيانات، ثم يتم جمعهما معاً وقسمة الناتج على 2
**توجد في البيانات قيم متطرفة
ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات

المتوسط الحسابي

جمع جميع القيم ثم قسمة الناتج على عدد تلك القيم أي مجموع قيم البيانات
عدد البيانات
**لا توجد في البيانات قيم متطرفة

تحقق من فهمك: ص 308-



1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال و 30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال ، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

أي مقاييس النزعة المركزية يصف بصورة أفضل البيانات الآتية؟

تدريب: ص 311-



(2) 19.2 , 40.4 , 36.8 , 37.2

(1) 833 , 796 , 781 , 776 , 758

(4) 53 , 61 , 45 , 59 , 61 , 55 , 49

(3) .65 , 70 , 71 , 60 , 55 , 65 , 63 , 58 , 60 , 69

هامش خطأ المعاينة

2 هامش خطأ المعاينة

يوجد نوعان من المقاييس يمكن استعمالهما لمجموعة بيانات ، هما المعلمة وهو مقياس يصف خاصية في المجتمع الكلي. والاحصائي وهو مقياس يصف خاصية في عينة

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش الخطأ في المعاينة بالقيمة

$$\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

**كلما زاد الحجم قل هامش الخطأ

تحقق من فهمك: ص 308-



في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصا ، قال 41% منهم إنهم مرتاحون للنهضة العلمية
2A) ما هامش خطأ المعاينة؟

2B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟

تدريب: ص 311-



8) رياضة: في دراسة مسحية عشوائية شارك فيها 5669 شخصا، وجد أن 31% منهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريا.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهريا؟

مقياس التشتت

تصف هذه المقاييس مقدار تباعد البيانات أو تقاربها من المتوسط

الانحراف المعياري

التباين

المجتمع

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2}{n}}$$

 حيث n عدد قيم المجتمع و μ المتوسط الحسابي للمجتمع
و x_k قيم المجتمع.

العينة

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

 حيث n عدد قيم العينة و \bar{x} المتوسط الحسابي للعينة
و x_k قيم العينة.

تحقق من فهمك : ص 308 -



(3A) احسب المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحددة في الجدول المجاور

31	33	33	34	28
31	36	34	29	33
36	28	32	29	30
28	28	29	33	29
29	27	28	31	26

عدد مرات التكرار	x	$(x - \mu)$	$(x - \mu)^2$
المجموع			

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تدرّب: ص 311-



10) قيادة: تحدد عادة السرعات القصوى على الطرقات تفاديا للحوادث .
 (a) فيما يأتي السرعات القصوى (mi/h) للطرق جميعها في إحدى الدول بين مدينتها وقراها . بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعا ، ثم أوجد الانحراف المعياري للسرعات في الجدول أدناه.

السرعات القصوى للطرق جميعها (mi/h)									
70	70	65	65	75	70	70	75	65	70

عدد مرات التكرار	x	$(x - \mu)$	$(x - \mu)^2$
المجموع			

.....

.....

.....

.....

مهارات التفكير العليا: ص 312-

16) تبرير: حذف قيمة متطرفة كبيرة من مجموعة بيانات ، كيف يؤثر ذلك في المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة البيانات؟
 وضع ذلك.

.....

.....

.....

.....

الواجب:



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحصيلي رياضيات

أي التالي ليس من مقاييس النزعة المركزية؟																											
الوسيط	(B)	الوسط الحسابي	(A)																								
الانحراف المعياري	(D)	المتوال	(C)																								
أي مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات التالية بشكل أفضل 15 , 46 , 52 , 47 , 75 , 42 , 53 , 45 ؟																											
الوسيط	(B)	الوسط	(A)																								
المتوال	(D)	التباين	(C)																								
<table border="1"> <tbody> <tr> <td>25</td><td>19</td><td>28</td><td>26</td><td>28</td><td>27</td><td>26</td><td>27</td> </tr> <tr> <td>26</td><td>22</td><td>42</td><td>26</td><td>29</td><td>26</td><td>26</td><td>25</td> </tr> <tr> <td>25</td><td>27</td><td>40</td><td>27</td><td>30</td><td>27</td><td>25</td><td>27</td> </tr> </tbody> </table>		25	19	28	26	28	27	26	27	26	22	42	26	29	26	26	25	25	27	40	27	30	27	25	27	أي مقاييس النزعة المركزية يناسب بيانات الجدول؟	
25	19	28	26	28	27	26	27																				
26	22	42	26	29	26	26	25																				
25	27	40	27	30	27	25	27																				
الوسيط	(B)	الانحراف المعياري	(A)																								
المتوال	(D)	المتوسط	(C)																								
حددت دائرة المرور سرعات السيارات على الطرق الخارجية بالميل / ساعة على النحو التالي: 70 , 66 , 64 , 55 , 61 , 75 , 74 , 61 , 78 , 72 ، ما المتوال لهذه السرعات؟																											
61	(B)	78	(A)																								
55	(D)	75	(C)																								
في دراسة مسحية عشوائية تشمل 100 طالب بمدرسة أفاد 95% منهم أن الجوال ضروري لهم ، أوجد هامش الخطأ لهذه الدراسة																											
± 0.01	(B)	± 0.001	(A)																								
± 10	(D)	± 0.1	(C)																								
إذا أجريت دراسة مسحية على 625 شخص ، وقال 47 % منهم إن القراءة مفيدة ، فإن نسبة أفراد المجتمع الذين قالوا إن القراءة مفيدة تتراوح																											
بين 44% و 50%	(B)	بين 43% و 51%	(A)																								
بين 45% و 49%	(D)	بين 40% و 50%	(C)																								
أي البيانات التالية له أكبر انحراف معياري؟ (ملاحظة: نستبعد البيانات المشتركة في الخيارات قبل إيجاد المدى)																											
16,10,15,11,13,13	(B)	14,10,12,11,13,13	(A)																								
14,10,30,11,13,13	(D)	11,10,20,11,13,13	(C)																								
أي البيانات التالية له أصغر انحراف معياري؟ (ملاحظة: نستبعد البيانات المشتركة في الخيارات قبل إيجاد المدى)																											
16, 10, 15, 15, 12, 12	(B)	16, 14, 15, 10, 12, 12	(A)																								
16, 16, 15, 10, 12, 12	(D)	16, 25, 15, 17, 12, 12	(C)																								

تحصيلي رياضيات

في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة ، أي مما يأتي لا يؤثر في الوسيط؟			
9	(A)	مضاعفة كل عدد	(B)
	(C)	زيادة كل عدد بمقدار 10	(D)
		زيادة القيمة الصغرى فقط	
		زيادة القيمة الكبرى فقط	

درجات اختبار: كانت درجات 5 طلاب اختبروا عشوائيا في فصل دراسي كما يلي 70 , 50 , 30 , 45 , 55 بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعا ، ثم احسب الانحراف المعياري لدرجاتهم إلى أقرب عدد صحيح.			
10	(A)	40	(B)
	(C)	15	(D)
		14	
		13	

الاحتمال المشروط

1

الاحتمال المشروط

 يرمز له بالرمز $P(B|A)$


إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين،
فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحدث
B إذا علم A

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) \neq 0$$

يسمى احتمال وقوع الحادثة B
بشروط وقوع الحادثة A
"احتمالاً مشروطاً"

تحقق من فهمك : ص 313-



1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13. إذا سحبت نوال بطاقة، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علماً بأن ما سحبتاه كان العدد 11 أو 12 أو 13؟

تدريب: ص 315-



يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، و10 كرات صفراء، و6 كرات بيضاء، و5 كرات خضراء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائية فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي:

1) أن تكون الكرة خضراء، إذا علم أنها ليست زرقاء.

2) أن تكون حمراء، إذا علم أنها ليست خضراء.

3) أن تكون صفراء، إذا علم أنها ليست حمراء وليست زرقاء.

4) أن تكون خضراء أو بيضاء، إذا علم أنها ليست حمراء.

5) أن تكون زرقاء، إذا علم أنها بيضاء.

الجداول التوافقية

2



كتابة الاحتمال: يعبر عن الاحتمال بكسر اعتيادي أو بكسر عشري أو بنسبة مئوية

تحقق من فهمك : ص 314-



2) أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائياً معافى، علماً بأنه لا يمارس المشي؟

عدد الأشخاص		الحالة
لا يمارس المشي (Nw)	يمارس المشي (w)	
1200	1600	مريض (S)
400	800	معافى (H)

تدريب: ص 311-



أخذ حصصاً	لم يأخذ حصصاً	
64	48	ناجح
18	32	راسب

7) فحص القيادة : يوضح الجدول أدناه أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة ، علماً بأن بعضهم أخذ حصصاً تدريبية تحضيراً للفحص ، والبعض الآخر لم يأخذ .
إذا اختير أحد الأشخاص عشوائياً ، فأوجد احتمال كل مما يأتي :
(a) الشخص ناجح علماً بأنه أخذ حصصاً.

(b) الشخص راسب علماً بأنه لم يأخذ حصصاً.

(c) لم يأخذ حصصاً ، علماً بأنه ناجح.

تحقق من فهمك : ص 314-



الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ضمن المنتخب الجامعي (K)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الجامعي (S)	269	262	276	257

3) يوضح الجدول عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم ، إذا اختير طالب عشوائياً فأوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي ، علماً بأنه في السنة الأولى؟

(A) 2.6% تقريباً

(B) 2.5% تقريباً

(C) 8.4% تقريباً

(D) 7.7% تقريباً

تدريب: ص 315-



أولى	ثانية	ثالثة	رابعة	
48	90	224	254	الحضور
182	141	36	8	الغياب

9) اختيار من متعدد: بين الجدول أدناه أعداد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة القدم ، والذين تغيبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة .
إذا اختير أحد الطلاب عشوائياً، فأوجد احتمال أن يكون قد حضر المباراة علماً بأنه من السنة الثالثة .

(A) 48.6% تقريباً

(B) 77.6% تقريباً

(C) 86.2% تقريباً

(D) 91.6% تقريباً

مهارات التفكير العليا: ص 316-

17) تحد: ألقى مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية ، ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علماً بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاثة الأولى؟

الواجب:

تحصيلي رياضيات

يبين الجدول التالي عدد الطلاب المشاركين وغير المشاركين في مسابقة القرآن الكريم في المرحلة الابتدائية ، فإذا اختير طالبا عشوائيا ، فما احتمال أن يكون مشاركا؟ علما بأنه في الصف الثالث.					
الصف الثاني	الصف الثالث	مشارك	30	40	
		غير مشارك	50	80	
					1
				$\frac{3}{5}$	(A)
				$\frac{2}{5}$	(B)
				$\frac{1}{3}$	(C)
				$\frac{1}{5}$	(D)

يحاول باحث تحديد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح على مجموعة من الأزهار. فقام بتعريض مجموعة منها لإضاءة المصابيح الجديدة، والأخرى لإضاءة مصابيح عادية، ويبين الجدول التالي أعداد الأزهار التي عاشت والتي ماتت، فإذا اخترنا زهرة واحدة عشوائية فما احتمال أن تكون الزهرة قد ماتت؟ علما بأنها تعرضت للإضاءة الجديدة.					
إضاءة جديدة	إضاءة عادية	عاشت	24	18	
		ماتت	6	12	
					2
				20%	(A)
				30%	(C)
				25%	(B)
				40%	(D)

إذا كانت A, B حادثتين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، بحيث كان $P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(A \cup B) = 0.4$ فما قيمة $P(A B)$ ؟					
				0.5	(A)
				0.7	(C)
				0.6	(B)
				0.8	(D)

في دراسة اجتماعية موضحة نتائجها في الجدول التالي : تم اختيار شخص عشوائيا ، ما احتمال أن يكون عاطلا؟ علما بأنه أعزب.					
موظف	عاطل	متزوج	5	3	
		أعزب	3	9	
					4
				25%	(A)
				60%	(C)
				33%	(B)
				75%	(D)

يبين الشكل نتيجة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 ما قيمة $P(A B)$ ؟					
				1	(A)
				$\frac{1}{3}$	(C)
				$\frac{1}{2}$	(B)
				$\frac{1}{4}$	(D)

الاحتمال

نسبة تقيس فرصة وقوع حادثة معينة إن كانت مرغوبة سميت **نجاحا** وعدم وقوعها يسمى **فشلا**
 إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثه **S** من المرات ، وعدد مرات فشل وقوع الحادثه نفسها **f** من المرات

احتمال الفشل

$$P(F) = \frac{f}{s+f}$$

احتمال النجاح

$$P(S) = \frac{s}{s+f}$$

$$P(\text{الحادثة}) = \frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$$



تنبيه

احتمال النجاح والفشل:

لاحظ أن الحرف الصغير S يدل على عدد مرات النجاح في وقوع حادثة.
 بينما الحرف الكبير S يدل على حادثة النجاح ،
 وكذلك بالنسبة للحرفين **F f**.

1 الاحتمال باستعمال التوافيق

$$nC_0 = 1$$

$$nC_n = 1$$

$$nC_1 = n$$

$$nC_r = nC_{r-1}$$



نعمد على التوافيق إذا كان الترتيب غير مهم
 ونعمد على التباديل إذا كان الترتيب مهم

تحقق من فهمك : ص 319-



1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رشحوا من الصف الثاني الثانوي 3 ، ومن الصف الأول الثانوي 11 ، وكان عدد الجوائز 4 ، واختير 4 طلاب من الذين رشحوا بطريقة عشوائية ، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟

تدريب: ص 321-



1) صندوق فيه 10 كرات ، منها 6 حمراء ، إذا سحبته منه كرتان معا عشوائيا ، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟

2 الاحتمال باستعمال التباديل

$$np_0 = n! \quad , \quad np_2 = n(n-1)$$

$$np_1 = n$$



نعمند على **التوافيق** إذا كان **الترتيب غير مهم**
ونعمند على **التباديل** إذا كان **الترتيب مهم**

تحقق من فهمك: ص 319-



2) سباق: اشترك صلاح ، وعبدالله ، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

تدرّب: ص 321-



4) مختبر: دخلت طالبات صف وعددهن 26 إلى مختبر المدرسة . إذا اختارت المعلمة أسماء الطالبات عشوائياً لتشكيل مجموعات للعمل فما احتمال أن تكون أول ثلاث طالبات ذكرت أسماءهن جميلة ، وأمنة، وخديجة على الترتيب؟

3 التوزيع الاحتمالي المنفصل

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي

التوزيع الاحتمالي

هو دالة تربط كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مع احتمال وقوعها ويعبر عنه بجدول أو معادلة أو تمثيل بياني
ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين التاليين:
□ احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و 1.
□ مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1.



المتغير العشوائي

هو المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة
↓
والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يُسمى **متغيراً عشوائياً منفصلاً**.

احتمالات المتغيرات العشوائية:

يقرأ الرمز $P(1)$ احتمال أن يكون المتغير العشوائي X مساوياً لـ 1.

التوزيع الاحتمالي المنفصل

هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل

البيانات الوصفية:

يمكننا أن نتعامل مع البيانات الوصفية بوصفها متغيرات عشوائية منفصلة.

البيانات المتصلة:

تكون البيانات متصلة إذا كانت تأخذ أي قيمة في فترة من العداد الحقيقية ، فمثلاً أطوال جميع أفراد العينة تمثل بيانات متصلة.

البيانات المنفصلة:

تكون البيانات منفصلة إذا أمكن عد البيانات مثل عدد الأرناب في مزرة

تحقق من فهمك : ص 319-



3) يوضح الجدول أدناه توزيعاً احتمالياً ، حيث ألقى مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة ، وسجل مجموع العددين الظاهريين على الوجهين العلويين واحتمال كل منهما.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

3B) استعمل التمثيل بالأعمدة لتحديد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتمالته.

3C) أوجد $P(5 \text{ أو } 11)$

3A) مثل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

تدريب: ص 321-



6) أخبار: أجرى موقع إلكتروني مسحا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس. والجدول المجاور يبين نتائج هذا المسح
a) بين أن هذه البيانات تمثل توزيعاً احتمالياً.

b) إذا اختير أحد الذين يشملهم هذا المسح عشوائياً ، فما احتمال أن يكون مصدر أخبار الرئيس الصحف أو الإنترنت؟

الاحتمال	المصدر
0.35	التلفاز
0.31	المذياع
0.02	الأصدقاء
0.11	الصحف
0.19	الإنترنت
0.02	مصادر أخرى

القيمة المتوقعة

4

يمكن إيجادها باستعمال القانون: $E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i)$

مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $p(x)$

تحقق من فهمك : ص 319-



4) أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة ، وتسجيل مجموع العددين الظاهريين على الوجهين العلويين.

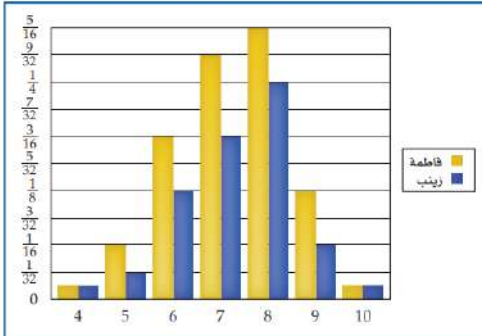


8) جوائز : باع أحد النوادي 500 تذكرة دخول لحضور إحدى مبارياته ثمن الواحدة 10 ريالاً ، وأجرى سحب عشوائي على أرقام التذاكر خُصصت فيه ثلاثة جوائز للأرقام الرابحة ، بحيث تريح تذكرة واحدة الجائزة الأولى وقيمتها 1000 ريال ، وتريح تذكرتان الجائزة الثانية وقيمتها 100 ريال ، وتريح 5 تذاكر الجائزة الثالثة وقيمتها 50 ريالاً. إذا اشترى شخص تذكرة ، فما القيمة المتوقعة للريح في هذا الموقف؟

مهارات التفكير العليا: ص 323-



18) اكتشاف الخطأ: كونت كل من فاطمة ، وزينب توزيعاً احتمالياً باستعمال التمثيل بالأعنة لمجموع العددين الناتجين عن دوران مؤشر القرص المجاور مرتين. أيهما يعد تمثيلها صحيحاً؟ فسر إجابتك.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الواجب:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحصيلي رياضيات

إذا اشترك عبدالله في سباق 400m مع ثلاثة رياضيين آخرين فإن احتمال أن ينهي عبدالله السباق في المركز الأول يساوي.....			
25%	(A)	50%	(B)
75%	(C)	100%	(D)

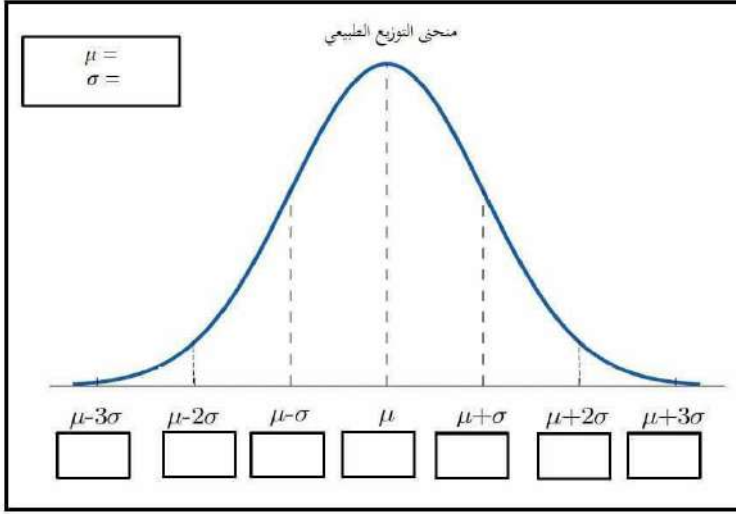
	<table border="1"> <tr> <td>عدد الكتابات X</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>الاحتمال P(X)</td> <td>1/4</td> <td>1/2</td> <td>1/4</td> </tr> </table>	عدد الكتابات X	0	1	2	الاحتمال P(X)	1/4	1/2	1/4	الجدول والتمثيل بالأعمدة يبيان التوزيع الاحتمالي للمتغير (توزيع عدد مرات ظهور الكتابة عند رمي قطعتي نقد). أوجد (كتابتين) P
عدد الكتابات X	0	1	2							
الاحتمال P(X)	1/4	1/2	1/4							
1/4	(A)	1	(B)							
1/2	(C)	0	(D)							

يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و6 كرات صفراء ، و4 كرات خضراء ، وكرتين زرقاوين . سحبت 3 كرات معا عشوائيا . إذا كان X متغيرا عشوائيا يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة ، فما جميع القيم الممكنة لـ X ؟			
1, 2	(A)	0, 1, 2	(B)
1, 2, 3	(C)	0, 1, 2, 3	(D)

<table border="1"> <tr> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>x</td> </tr> <tr> <td>0.1</td> <td>0.8</td> <td>0.1</td> <td>p(x)</td> </tr> </table>	3	2	1	x	0.1	0.8	0.1	p(x)	ما القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي المبين في الجدول أدناه؟
3	2	1	x						
0.1	0.8	0.1	p(x)						
0,1	(A)	2	(B)						
0.56	(C)	1	(D)						



3) تتوزع مجموعة بيانات طبيعياً بمتوسط حسابي 161، وانحراف معياري 12، أوجد أن يتم اختيار قيمة لـ X عشوائياً من هذا التوزيع، بحيث تكون أقل من 149، أي أوجد $P(X < 149)$.



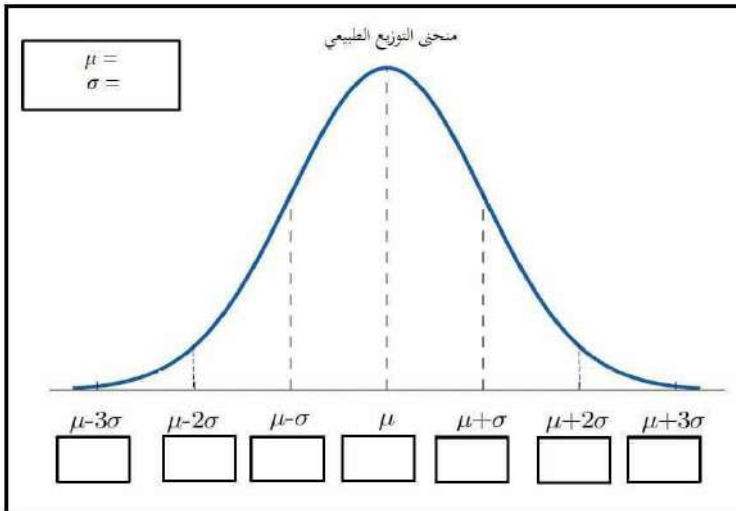
3) عينة موزعة توزيعاً طبيعياً

تحقق من فهمك: ص 326-



درجات: إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلو جراماً، وانحراف معياري 10 كيلو جرامات، فاعتمد ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين:

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلتهم بين 60، 80 كيلو جرام؟

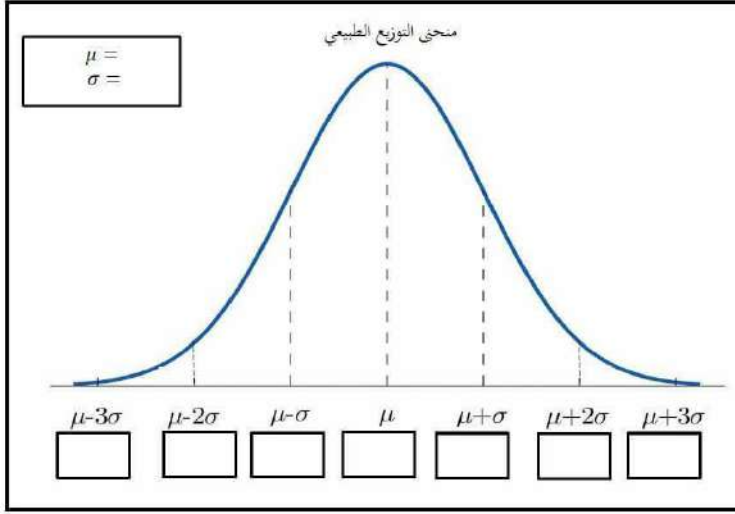


3B) ما احتمال أن يتم اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلو جرام؟



8) مدارس: أعطى عمران اختبارا قصيرا لطلبته البالغ عددهم (50) طالبا ، وكانت الدرجات موزعة توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي 21 ، وانحراف معياري 2.

(a) ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 19 , 23 ؟



(b) ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 , 25 ؟

مهارات التفكير العليا: ص 328-

14) اكتشاف الخطأ: تتوزع أطوال أقطار نوع من الأشجار توزيعا طبيعيا بمتوسط مقداره 11.5 cm ، وانحراف معياري مقداره

2.5 cm . ومدى من 3.6 cm إلى 19.8 cm ، وقد حاولت كت من مريم وأمينة إيجاد مدى 68% من البيانات التي تقع في وسط

التوزيع . أيهما كانت إجابتها صحيحة ؟ فسر إجابتك

أمينة

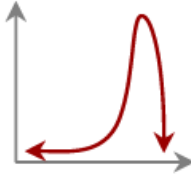
تمتد النسبة 68% من يساوي $\mu + \sigma$ إلى $\mu - \sigma$ ، أي أن مدى 68% سيكون من 9cm إلى 14 cm

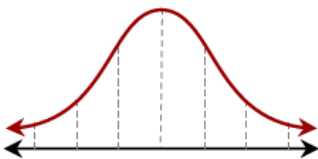
مريم

مدى البيانات 16.2 cm ، 68% من المدى يساوي تقريبا 11cm ، ويتوزع هذا المدى بالتساوي حول المتوسط 11.5cm أي أن مدى 68% سيكون من 6 cm إلى 17 cm

الواجب:

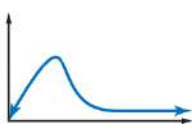
تحصيلي رياضيات

		ما الوصف الفضل للتمثيل البياني ؟	1
ذو التواء موجب	(A)	ذو التواء سالب	(B)
يمثل توزيعا طبيعيا	(C)	يمثل توزيعا متماثلا	(D)

		المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي في الشكل تساوي....	2
$\frac{1}{4}$	(A)	$\frac{1}{2}$	(B)
$\frac{3}{4}$	(C)	1	(D)

مجموعة بيانات تتوزع توزيعا طبيعيا ، فإذا كان وسطها الحسابي 2 وانحرافها المعياري 1 ، فما نسبة أن يكون x أكبر من 3؟			
84%	(A)	97%	(B)
16%	(C)	25%	(D)

يتوزع عمر 10000 مصباح كهربائي توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي 300 يوم ، وانحراف معياري 40 يوم . كم مصباحا يقع عمره بين 260 يوما و340 يوما؟			
2500	(A)	3400	(B)
5000	(C)	6800	(D)

		ما الوصف الأفضل لمنحنى التوزيع الاحتمالي الممثل	5
توزيع سالب الالتواء	(A)	توزيع متماثل	(B)
توزيع طبيعي	(C)	توزيع موجب الالتواء	(D)

مجموعة بيانات تتوزع توزيعا طبيعيا ، فإذا كان وسطها الحسابي 12 وانحرافها المعياري 2 ، فما قيمة $P(10 < x < 16)$ ؟			
81.5 %	(A)	68 %	(B)
47.5 %	(C)	40 %	(D)

تحصيلي رياضيات

مجموعة بيانات تتوزع توزيعاً طبيعياً ، فإذا كان وسطها الحسابي 25 وانحرافها المعياري 2 ، فكم احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائياً أقل من 27؟				7	
97%	(B)		84%		(A)
25%	(D)		16%		(C)
في توزيع طبيعي لمجموعة طلاب ، إذا كانت درجات 99% منهم تتراوح بين 13 , 49 ، فما قيمة الانحراف المعياري؟				8	
10	(B)		6		(A)
31	(D)		18		(C)
إذا أجريت احصائية لطالبات مدرسة ، وكان 95% من الطالبات تتراوح أوزانهن بين 52kg و 68kg ، فما الوسط الحسابي؟				9	
60	(B)		59		(A)
65	(D)		61		(C)

1 تمييز التجربة ذات الحدين

1

تحقق من فهمك : ص 332-



حدد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين ، أو يمكن جعلها كذلك . وإذا كانت تجربة ذات حدين فاكتب قيم n, p, q وقيم المتغير العشوائي الممكنة ، وإذا لم تكن كذلك فبين السبب (1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحد أن 61% يحبون الزي الجديد ، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبا بشكل عشوائي وسؤالهم عما إذا كانوا يحبون الزي الجديد . وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

$n=$	$P=$	$q=$
------	------	------

(1B) أجاب خالد عن اختبار مكون من 20 فقرة من نوع " الاختيار من متعدد " لكل فقرة منها أربع إجابات ، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار) وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الاجابات الصحيحة.

$n=$	$P=$	$q=$
------	------	------

تدرّب: ص 334-



حدد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين ، أو يمكن جعلها ذات حدين . وإن كانت كذلك ، فاكتب قيم n, p, q ، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة . وإذا لم تكن تجربة ذات حدين فبين السبب: (1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6 ، ثم ألقى المكعب 10 مرات ، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.

$n=$	$P=$	$q=$
------	------	------

(2) ألقى قطعة نقد 20 مرة ، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة.

$n=$	$P=$	$q=$
------	------	------

(4) صندوق به 52 كرة ، منها 13 كرة حمراء ، و 13 كرة زرقاء ، و 13 كرة بيضاء ، و 13 كرة صفراء . سحب 10 كرات على التوالي دون إرجاع . والمتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

التوزيع ذو الحدين

2

$$P(x) = {}_n C_X p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)! X!}$$



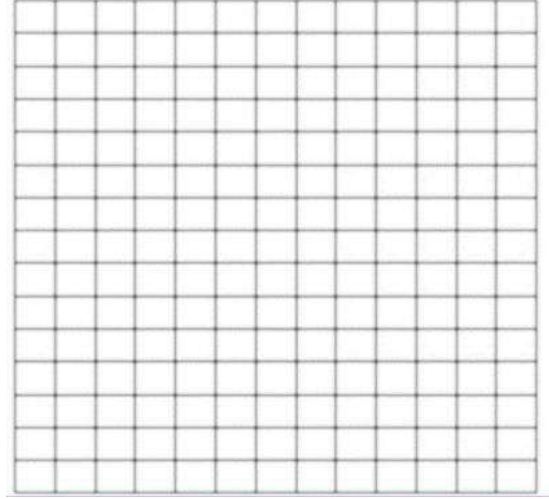
تحقق من فهمك : ص 332-



(2) كليات : يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج، إذا اختير 7 خريجين عشوائياً، وتم سؤالهم عما إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة، وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكون التوزيع ذا الحدين، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم.

n=	P=	q=
----	----	----

x	${}_n C_X p^X q^{n-X}$	$p(x)$



.....

تدريب: ص 334-



لكل من التوزيعات ذات الحدين الآتية، يدل الرمز n على عدد المحاولات، ويدل الرمز p على احتمال نجاح كل محاولة . أوجد احتمال الحصول على X من النجاحات:
 $n = 6, p = 0.6, X \leq 4$ (20)

n=	P=	q=
----	----	----

x	${}_n C_X p^X q^{n-X}$	$p(x)$

.....

3 المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$$
 الانحراف المعياري:

$$\sigma^2 = npq$$
 التباين:

$$\mu = np$$
 المتوسط:



تحقق من فهمك: ص 332-



3) كليات: أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي في تحقق من فهمك 2، وفسر معنى المتوسط في سياق الموقف

n=	P=	q=
----	----	----

تدرّب: ص 334-



كون توزيع ذا الحدين لكل متغير عشوائي ثم أوجد المتوسط وفسر معناه في سياق الموقف ثم أوجد التباين:

7) افادت دراسة احصائية أن 65% من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم ، إذا تم اختيار 8 طلاب عشوائياً ممن يمتلكون سيارات ، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم.

n=	P=	q=
----	----	----

4 تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي:

 في توزيع ذات الحدين عندما تمثل n عدد المحاولات، واحتمال النجاح p واحتمال الفشل q ويكون $np \geq 5$ ، $nq \geq 5$ يمكن تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\bar{x} = np$ وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$

تحقق من فهمك: ص 332-



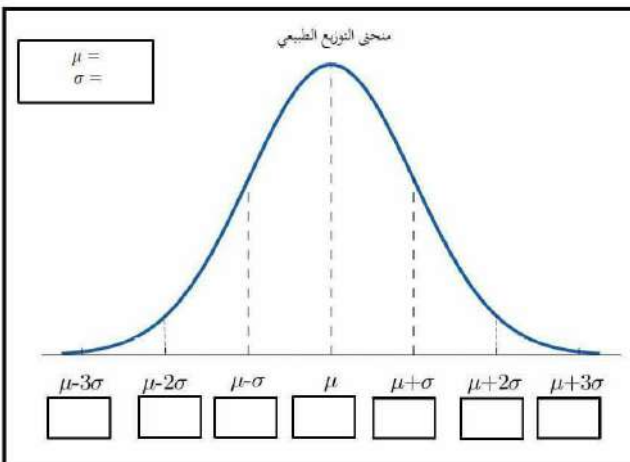
4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في

نهاية العام الدراسي. غير أن أية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت

بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة

عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألا يرى أكثر

من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية؟

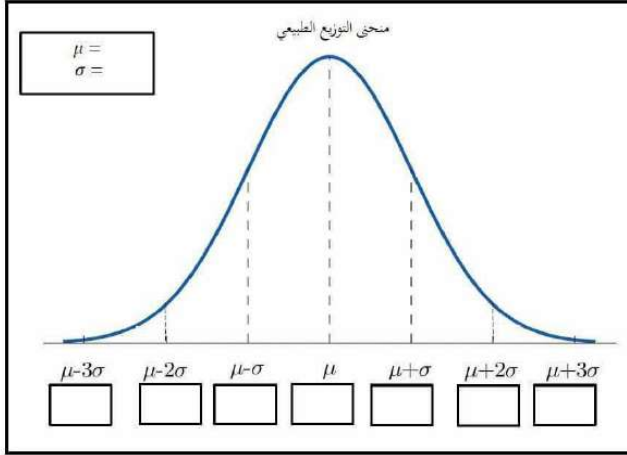


n=	P=	q=
----	----	----



8) أعمال صيفية: تبين في دراسة سابقة أن 90% من طلاب الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية ، لكن منذراً قدر أن النسبة أقل من ذلك ، لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 طالب من الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائياً. ما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلاب المستهدفين حصلوا على عمل صيفي؟

n=	P=	q=
----	----	----



مهارات التفكير العليا: ص 335-

24) تحد: في تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي إذا علمت أن احتمال وجود 60-66 نجاحا يساوي 34% وكان $\bar{x} = 60$ ، واحتمال النجاح 36% فكم كان عدد المحاولات؟

الواجب:

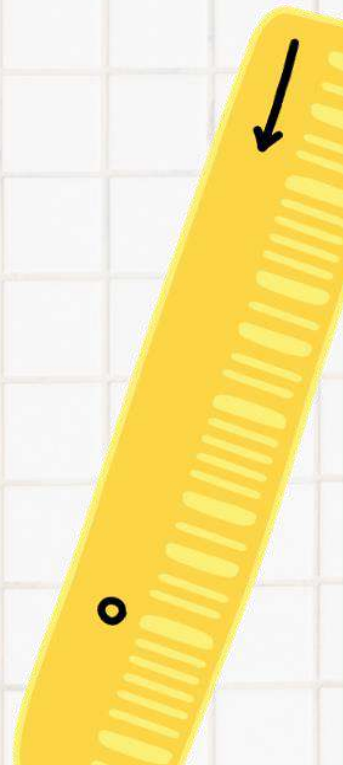
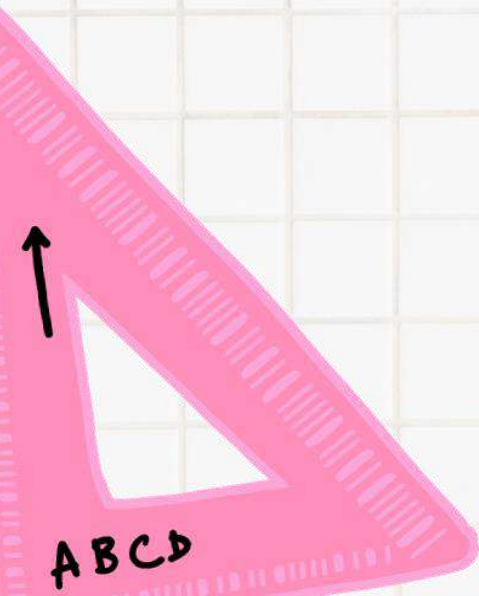
تحصيلي رياضيات

في تجربة ذات حدين ، إذا كان احتمال النجاح 40% ، وكان المتوسط 20 ، فكم كان عدد المحاولات؟			
30	(A)	40	(B)
50	(C)	70	(D)
1			
أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام العشر القادمة 40% ، أوجد التباين؟			
$\sqrt{2.4}$	(A)	2.4	(B)
4	(C)	6	(D)
2			
في تجربة ذات حدين ، إذا كان احتمال النجاح 35% ، وعدد المحاولات 4 ، فإن الوسط يساوي...			
1.3	(A)	1.4	(B)
1.5	(C)	1.6	(D)
3			
في حادثة ذات حدين ، إذا كان عدد المحاولات 20 ، وكان الوسط 12 ، فما قيمة الانحراف المعياري؟			
$\sqrt{4.8}$	(A)	1.2	(B)
$\sqrt{1.2}$	(C)	4.8	(D)
4			
توزيع ذات حدين مقدار تباينه 25 ، ما قيمة انحرافه المعياري؟			
625	(A)	25	(B)
12.5	(C)	5	(D)
5			
إذا كان نجاح عملية جراحية 90% ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أجريت العملية 3 مرات؟			
0.001	(A)	0.1	(B)
0.9	(C)	0.999	(D)
6			



الفصل الثامن النهايات والاشتقاق

- ❖ تقدير النهايات بيانيا
- ❖ حساب النهايات جبريا
- ❖ المماس والسرعة المتجهه
- ❖ المشتقات
- ❖ المساحة تحت المنحنى والتكامل
- ❖ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل



يتمحور علم التفاضل والتكامل حول مسألتين أساسيتين:

- ✓ إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه. (وهذا هو التفاضل > الاشتقاق <)
- ✓ إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x. (وهذا هو التكامل)

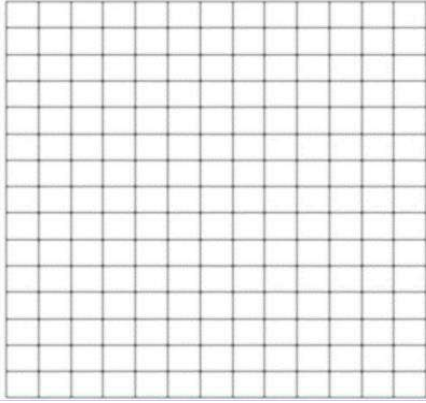


1 تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

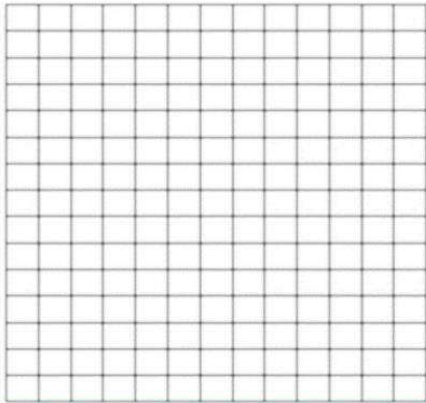
تحقق من فهمك : ص 344- قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عزز إجابتك باستعمال جدول قيم



$$\lim_{x \rightarrow -3} (1 - 5x) \quad (1A)$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \quad (1B)$$

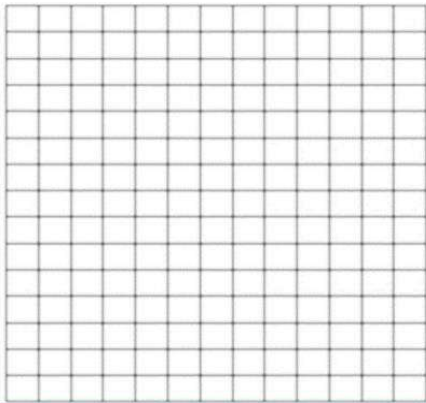


تدرب: ص 351- قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عزز إجابتك باستعمال جدول قيم

تدرب: ص 351-



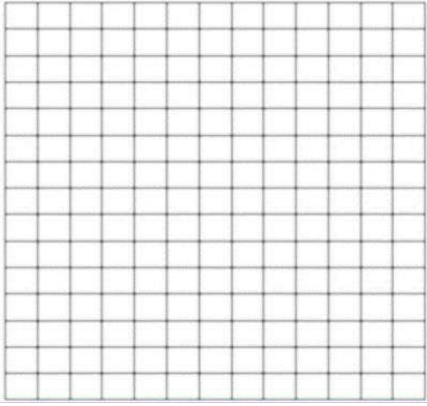
$$\lim_{x \rightarrow 5} (4x - 10) \quad (1)$$



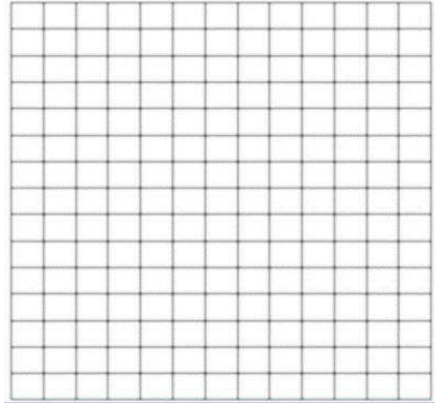
تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

2

تحقق من فهمك : ص 345- قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عزز إجابتك باستعمال جدول قيم

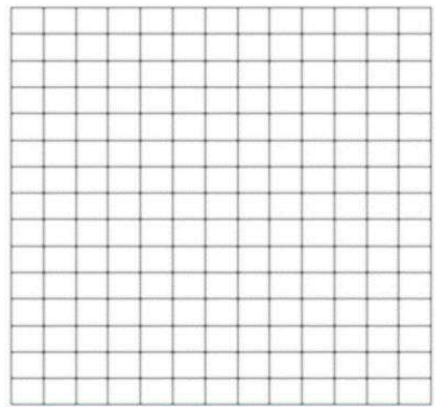


$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} \quad (2A)$$



$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-4x-5}{x-5} \quad (2B)$$

تدرب : ص 351- قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني ، ثم عزز إجابتك باستعمال جدول قيم



$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3+8}{x^2-4} \right) \quad (4)$$

قدر إن أمكن كلام من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

تحقق من فهمك: ص 346-



حيث $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (3A)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \quad x < 1 \\ 2x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

حيث $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x), \lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ (3B)

$$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \quad x < -2 \\ -x^2 & , \quad x \geq -2 \end{cases}$$

تدرب: ص 351-



$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x^2 - 1} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{-x} - 7) \quad (15)$$



إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية الدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين، إذا من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من c ، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞ ، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من c ، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

قدر إن أمكن كلا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

تحقق من فهمك: ص 347-



السلوك غير المحدد تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x \rightarrow c$ ، أنه باختيار قيمة x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.



النهايات غير المحددة

من الضروري أن نفهم أن العبارتين

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

هما فقط وصف للحالة التي

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

بسيما

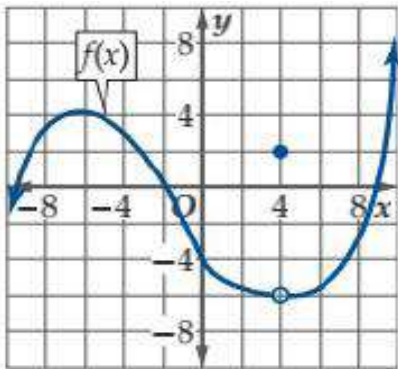
غير موجودة، إذ لا يمثل

الرمزان ∞ و $-\infty$ عددين

حقيقيين

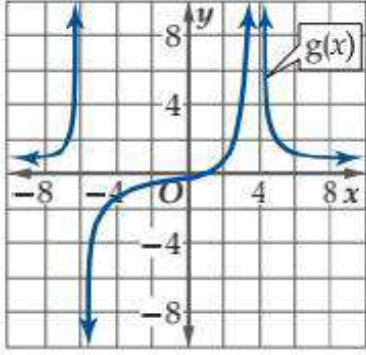
قدر إن أمكن كلا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

تدرب: ص 351-



$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad (23)$$



$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow -6} g(x) \quad (24)$$

النهايات والسلوك التذبذبي

5

السلوك التذبذبي

عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيميتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c



لا تكون النهاية موجودة أيضا عند تذبذب قيم $f(x)$ بين قيميتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c

قدر إن أمكن كلا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

تحقق من فهمك: ص 348-



$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin x) \quad (5B)$$

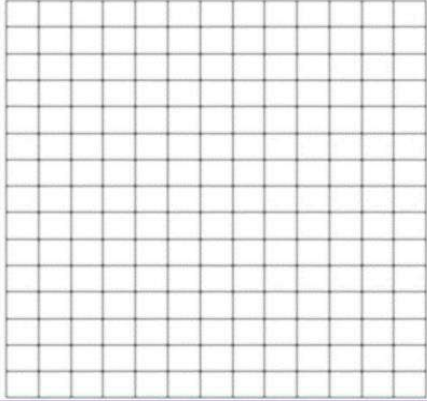
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad (5A)$$

تدرب: ص 351-



$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} \quad (34)$$

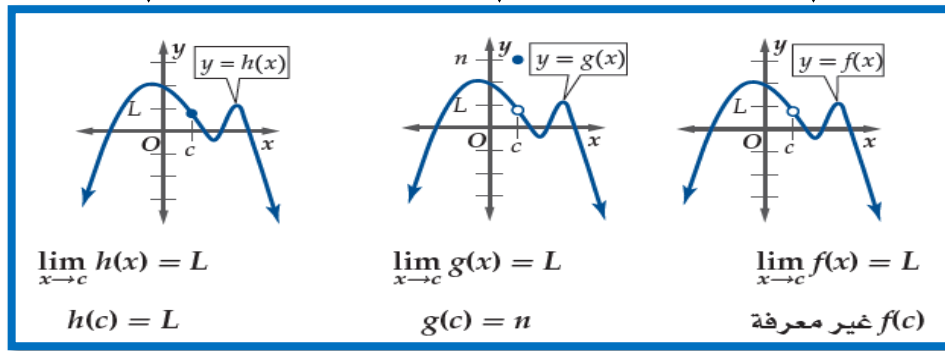
$$\lim_{x \rightarrow 6} (x + \sin x) \quad (7)$$



تقدير النهايات عند قيم محددة

3

لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c



إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد ،
وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد



النهاية من جهة واحدة

النهاية من اليسار

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_2$$

وتقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2

النهاية من اليمين

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_1$$

وتقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار
للدالة

لمناقشة النهاية من اليمين لدالة عند C
يجب أن نضمن أن الدالة معرفة على
يمين C على فترة (c, b) ولمناقشة النهاية من
اليسار لدالة عند c يجب أن نضمن أن
الدالة معرفة على يسار c على فترة (a, c)



النهاية من جهتين (النهاية عند نقطة)

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c ،

إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين ،
أي أنه:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ إذا وفقط إذا}$$

تقدير النهاية عند الملائمة

تستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$$

وتقرأ نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب ما لا نهاية هي L_2

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$$

وتقرأ نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب ما لا نهاية هي L_1

* درست سابقاً أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

المستقيم $y=c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$$

المستقيم $x=c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$$

تنبيه: السلوك المتذبذب

إن التذبذب اللانهائي للدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من $-\infty$ أو ∞ فإذا كان التذبذب بين قيمتين مختلفتين فالنهاية غير موجودة أما إذا كان التذبذب متقارباً نحو عدد معين فالنهاية موجودة.



قدر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

تحقق من فهمك: ص 349-



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x \quad (6B)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^4} - 3 \right) \quad (6A)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \quad (6c)$$

قدر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

تدرّب: ص 351-



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 22}{4x^3 - 13} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 7x^4 - 4x + 1) \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cos x \quad (31)$$

**يمكن استعمال التمثيل البياني أو جدول قيم لتقدير النهايات عند المالا نهاية في كثير من المواقف الحياتية

تحقق من فهمك : ص 350-



7B) عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبا وفاكهة وخميرة فإن عدد الذبابات بعد t يوم يعطى بالعلاقة

$$P(t) = \frac{230}{1 + 56.5(2.7)^{-0.37t}}$$

قدر $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ إذا كانت موجودة ، وفسر معناها

7A) كهرباء: يزود مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يعطى بالعلاقة $V(t) = 165 \sin 120 \pi t$ حيث t الزمن بالثواني. قدر $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$ إذا كانت موجودة ، وفسر معناها



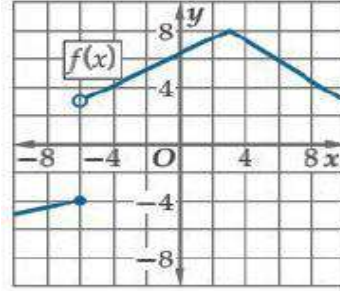
53) **دواء:** تم توزيع لقاح للحد من عدوى مرض ما. ويبين التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح.

(a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w \rightarrow 3} f(w)$ ، $\lim_{w \rightarrow 1} f(w)$

(b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w \rightarrow \infty} f(w)$ إذا كانت موجودة , وفسر النتيجة .

مهارات التفكير العليا: ص 352

48) **اكتشف الخطأ:** قال علي: إن نهاية الدالة الممثلة بيانيا في الشكل أدناه عندما تقترب x من -6 هي -4 في حين قال محمد: إنها 3 هل أي منهما إجابته صحيحة؟. برر إجابتك



51) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائما أو صحيحة أحيانا أو غير صحيحة أبدا. برر إجابتك

إذا كان : $f(c) = L$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

1	باستعمال التمثيل البياني للدالة $f(x) = y$ أدناه، ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (إن وجدت)؟		
1	(B)	0	(A)
النهاية غير موجودة	(D)	3	(C)
2	إذا كانت $g(x) = \frac{1}{x^2}$ وكانت العبارات: ا نقطة عدم اتصال لا نهائي نقطة عدم اتصال قفزي نقطة عدم اتصال قابل للإزالة فأَي مما يأتي يصف التمثيل البياني لمنحنى الدالة $g(x)$ ؟	فقط (B) او فقط (D)	ا فقط (A) ا, فقط (C)
3	في الشكل نقدر: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$..		-1 (A) 1 (C)
0	(B)	2	(D)
4	في الشكل نقدر: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$..		-2 (A) 0 (C)
-1	(B)	غير موجودة	(D)
5	في الشكل نقدر: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$..		-2 (A) 1 (C)
0	(B)	غير موجودة	(D)
6	إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -5$ و $f(x) = 7$ ، فإن قيمة $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ تساوي..	5	(A) 7 (C)
غير موجودة	(D)	3	(C)

تحصيلي رياضيات

		في الشكل نقدر: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$..	7
0	(B)	-2	(A)
غير موجودة	(D)	1	(C)

		في الشكل نقدر: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$..	8
0	(B)	$-\infty$	(A)
غير موجودة	(D)	$+\infty$	(C)

		في الشكل نقدر: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$..	9
0	(B)	$-\infty$	(A)
غير موجودة	(D)	$+\infty$	(C)

		في الشكل نقدر: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$..	10
0	(B)	$-\infty$	(A)
غير موجودة	(D)	$+\infty$	(C)

		يمكن وصف سلوك الطرف الأيسر للدالة $f(x)$ في الشكل: ..	11
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	(B)	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	(A)
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	(D)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$	(C)

الدالة $f(x)$ معرفة كالتالي: $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x < -1 \\ x^2, & x \geq -1 \end{cases}$ ، ما قيمة $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ؟		12	
1	(B)	-1	(A)
غير موجودة	(D)	4	(C)

تحصيلي رياضيات

قيم a التي تجعل الدالة: $f(x) = \begin{cases} a^2 + 2x, & x \geq 1 \\ a + 4, & x < 1 \end{cases}$ متصلة عند $x = 1$ هي:.....		13		
0, -1	(B)		0,1	(A)
1, -2	(D)		-1,2	(C)

1 حساب النهاية عند نقطة

خصائص النهايات

إذا كان k, c عددين حقيقيين، n عددا صحيحا موجبا، وكانت النهايتان $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ موجودتين فإن كلا من الخصائص الآتية صحيحة:

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) \quad \text{خاصية المجموع}^*$$



$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) \quad \text{خاصية الفرق}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = \lim_{x \rightarrow c} kf(x) \quad \text{خاصية الضرب في ثابت}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) \quad \text{خاصية الضرب}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \quad \text{خاصية الضرب في ثابت}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n \quad \text{خاصية القوة}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \quad \text{خاصية الجذر النوني}^*$$

إذا كان n عدد فردي أما إذا كان n عدد زوجي فلا بد أن تكون $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$

تنبيه

إذا كانت $f(x) \leq 0$

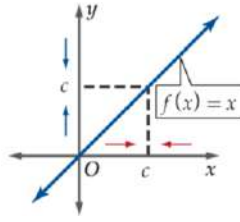
و n عددا زوجيا فإن

$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)}$ غير موجودة

نهايات الدوال

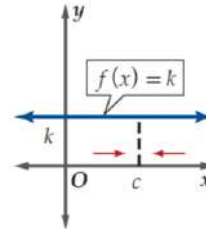
نهاية الدالة المحايدة

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c$$



نهاية الدوال الثابتة

$$\lim_{x \rightarrow c} k = k$$



استعمل خصائص النهايات لحساب نهاية كل مما يأتي

تحقق من فهمك: ص 354 -



$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+3} \quad (1c)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-3}{2x^2-x-15} \right) \quad (1B)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^3 + 4) \quad (1A)$$

استعمال خصائص النهايات لحساب نهاية كل مما يأتي

تدرّب: ص 361-



$$\lim_{x \rightarrow -4} [x^2(x+1) + 2] \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{1}{x} + 2x + \sqrt{x} \right) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x^3 + 4x + 13}{x-3} \right) \quad (2)$$

استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

2

نهايات الدوال

نهايات الدوال النسبية

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}, q(x) \neq 0$$



نهايات دوال كثيرات الحدود

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$$

****يشترط** لحساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال التعويض المباشر، ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفراً عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكناً ، وإلا فاذكر السبب

تحقق من فهمك : ص 355-



$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+1}{x^2+3} \quad (2B)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7) \quad (2A)$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt{x+6} \quad (2D)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} \quad (2C)$$

تدرّب: ص 361-



$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^3 - 3x^2 + 10) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x^2+9}{\sqrt{x}-4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} (-x^2 + 3x + \sqrt{x}) \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{2-x} \quad (10)$$

استعمال التحليل لحساب النهايات

3

إذا قمنا بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلنا إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ فنبتسب العبارة جبرياً من خلال

إنطاق البسط أو المقام.
(الضرب في المرافق)



تنبيه (التحليل)

عند اختصار البسط بأكمله، فإنه يصبح 1 وليس 0

تحليل كل من البسط والمقام واختصار
العوامل المشتركة

احسب كل نهاية مما يأتي

تحقق من فهمك: ص 356-



$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42} \quad (3B)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2} \quad (3A)$$

تدرب: ص 361-



$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} \quad (14)$$

استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

تنبيه
مرافق العدد $\sqrt{x} - k$ هو $\sqrt{x} + k$



احسب كل نهاية مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 357-



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x} \quad (4B)$$

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} \quad (4A)$$

احسب كل نهاية مما يأتي:

تدرّب: ص 361-



$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{x+1}-1} \quad (15)$$

5 نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالا نهائية

نهايات دوال كثيرات الحدود

 إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

دالة كثيرة حدود فإن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$$

نهايات دوال القوى

 لأي عدد صحيح موجب n

 إذا كان n فرديا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$$

 إذا كان n زوجيا

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \infty$$

الضرب في المالا نهائية

 إذا كان $a > 0$ فإن: $a(\infty) = \infty$ ، $-a(\infty) = -\infty$


احسب كل نهاية مما يأتي

تحقق من فهمك : ص 358-



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5) \quad (5c)$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^6 + 3x^5 - x) \quad (5B)$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 - 4x^2 + 9) \quad (5A)$$

.....

.....

.....

.....

.....

احسب كل نهاية مما يأتي

تدرّب: ص 361-



$$\lim_{x \rightarrow \infty} (10x + 14 + 6x^2 - x^4) \quad (22)$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5 - 2x^2 + 7x^3) \quad (20)$$

.....

.....

.....

.....

.....

6 نهايات الدوال النسبية عند المالا نهاية

نهاية المتتابعات
لأي عدد صحيح موجب n

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} = 0$$

نهاية الدوال النسبية
لأي عدد صحيح موجب n

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

نهاية دالة المقلوب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

 توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من ∞

إذا كانت
درجة البسط أكبر من درجة المقام
فإن النهاية إما ∞ أو $-\infty$ ، بحسب إشارة
الحد الرئيس في كل من البسط والمقام

إذا كانت
درجة البسط مساوية لدرجة المقام
فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي
الحدين الرئيسين في البسط والمقام

إذا كانت
درجة البسط أقل من درجة المقام
فإن النهاية صفر

احسب كل نهاية مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 359-



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 3x^2 + 1}{2x^3 + 4x} \quad (6c)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 + 7}{5x + 1} \quad (6B)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x - 10} \quad (6A)$$

احسب كل نهاية مما يأتي:

تدرب: ص 361-



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x - 11}{-x^5 + 17x^3 + 4x} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^3 - 12x}{4x^2 + 13x - 8} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 10x + 2}{4x^3 + 20x^2} \quad (21)$$

نهايات المتتابعات

7

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

تحقق من فهمك : ص 360-



$$b_n = \frac{2n^3}{3n+8} \quad (7B)$$

$$a_n = \frac{4}{n^2+1} \quad (7A)$$

$$c_n = \frac{9}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \quad (7c)$$

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

تدرب: ص 361-



$$a_n = \frac{12n^2+2}{6n^2-1} \quad (29)$$

$$a_n = \frac{8n+1}{n^2-3} \quad (27)$$

مهارات التفكير العليا: ص 362-

(50) تبرير: إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية فهل العلاقة

$$\lim_{x \rightarrow c} r(x) = r(c)$$

صحيحة دائما أو صحيحة أحيانا أو غير صحيحة أبدا. برر إجابتك

الواجب:

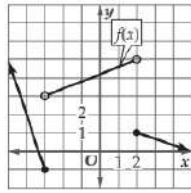
تحصيلي رياضيات

 ما قيمة $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$ ؟

4	(B)	3	(A)	1
النهاية غير موجودة	(D)	5	(C)	

 ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0 ؟

$-\frac{3}{4}$	(B)	$-\pi$	(A)	2
0	(D)	$-\frac{1}{2}\pi$	(C)	


 باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه ، ما قيمة $\lim_{h \rightarrow 2^+} f(x)$ ؟

1	(B)	0	(A)	3
غير موجودة	(D)	5	(C)	

 ... تساوي $\lim_{x \rightarrow 5} (3x^3 - 5x^2 - 3x - 10)$

225	(B)	125	(A)	4
235	(D)	275	(C)	

 ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} (4^x - \cos x + 2x - 1)$ ؟

-1	(B)	-2	(A)	5
2	(D)	1	(C)	

 ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{7}}{x-3}$ ؟

$3 - \sqrt{7}$	(B)	$3 + \sqrt{7}$	(A)	6
3	(D)	$\sqrt{7} - 3$	(C)	

 ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 6}{x-1}$ ؟

0	(B)	4	(A)	7
-4	(D)	-2	(C)	

تحصيلي رياضيات

		ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ؟		8
6	(B)	0	(A)	
8	(D)	4	(C)	
		... تساوي $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$		9
0	(B)	-5	(A)	
25	(D)	10	(C)	
		... تساوي $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$		10
0	(B)	$-\infty$	(A)	
$+\infty$	(D)	2	(C)	
		... تساوي $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x + 2)$		11
0	(B)	$-\infty$	(A)	
∞	(D)	1	(C)	
		... تساوي $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$		12
0	(B)	$-\infty$	(A)	
$+\infty$	(D)	2	(C)	
		... تساوي $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 1}{x^2 + 4x}$		13
$\frac{7}{4}$	(B)	7	(A)	
$+\infty$	(D)	$-\infty$	(C)	
		ما قيمة $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 - 12x}{5 + 3x^2 - 2x^3}$ ؟		14
-2	(B)	-5	(A)	
5	(D)	2	(C)	
		... تساوي $\lim_{x \rightarrow 5} x^5$		15
0	(B)	$-\infty$	(A)	
$+\infty$	(D)	2	(C)	

تحصيلي رياضيات

النهاية : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{2x+5}$ تساوي ...				16
0	(B)		(A) $-\frac{1}{5}$	
∞	(D)		(C) $\frac{3}{2}$	
إذا كان : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax}{3+ x }$ فما قيمة A ؟				17
2	(B)		(A) 6	
-6	(D)		(C) -2	
ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cos x)$ ؟				18
1	(B)		(A) 0	
3	(D)		(C) 2	
النهاية : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3-1}$ تساوي ...				19
$\frac{1}{12}$	(B)		(A) $\frac{1}{8}$	
0	(D)		(C) ∞	
... تساوي $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$				20
$\frac{1}{6}$	(B)		(A) $\frac{1}{9}$	
غير موجودة	(D)		(C) 0	
ما قيمة $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ ؟				21
5	(B)		(A) 10	
0	(D)		(C) 2	
ما قيمة $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x^3}{2x^3+5}$ ؟				22
1	(B)		(A) $\frac{3}{2}$	
$-\frac{3}{2}$	(D)		(C) -1	

1 ميل المماس للمنحنى عند نقطة عليه

معدل التغير اللحظي

معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$



ويعطى بالصيغة $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

يمكن استعمال صيغة معدل التغير اللحظي لإيجاد ميل مماس منحنى عند نقطة عليه

معدل التغير اللحظي

عند حساب نهاية ميل

المستقيم القاطع عندما

بعد إجراء الاختصارات والتي

تحتوي المتغير h ستصبح

أصفاراً.

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

تحقق من فهمك : ص 366-



$$y = x^2, (3, 9) \text{ (1A)}$$

$$y = x^2 + 4, (-2, 8) \text{ (1B)}$$

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

تدرب: ص 369-



$$y = \frac{3}{x}, (1, 3), (3, 1) \text{ (3)}$$

$$y = x^2 - 5x, (1, -4), (5, 0) \text{ (1)}$$

ميل المنحنى عند أي نقطة عليه

2

يمكن استعمال صيغة معدل التغير اللحظي لإيجاد معادلة ميل المنحنى عند نقطة $(x, f(x))$ عليه

تحقق من فهمك : ص 366-



أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه :

$$y = x^3 \quad (2B)$$

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad (2A)$$

تدرب: ص 369-



أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه :

$$y = \frac{1}{x^2} \quad (8)$$

$$y = 4 - 2x \quad (5)$$

السرعة المتوسطة المتجهه

3

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتوسطة المتجهه للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b

$$v_{avg} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تحقق من فهمك : ص 367-



موقع الجسم

موقع الجسم عادة يعطى بالعلاقة $y=f(x)$ وذلك لتحديد الموقع في المستوى بدلالة الإحداثيين x, y أما إذا أعطي بوصفه دالة في الزمن t ، فهذا يعني الإزاحة (محصلة المركبة x والمركبة y) لموقع الجسم عند اللحظة t ، وإذا كانت الحركة على خط مستقيم فإن دالة الموقع تكون نفسها دالة المسافة مع أخذ الاتجاه بعين الاعتبار.

(3) تمثل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسياً، ما السرعة المتوسطة المتجهه للبالون بين $t = 1s$ ، $t = 2s$ ؟

تدرّب: ص 369-



(12) تمثل $s(t)$ في كل مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد t دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهه للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة. (تذكر بأن تحول الدقائق إلى ساعات)

$$s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3, \quad 3 \leq t \leq 5$$

السرعة المتجهه اللحظية عند لحظة زمنية معينة

4

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهه اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة

تحقق من فهمك : ص 368-



(4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهه اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7s

تدرب: ص 369-



17) تمثل $f(t)$ في كل مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى: $t = 3$, $f(t) = 100 - 16t^2$

5 السرعة المتجهه اللحظية عند أي لحظة زمنية

5

يمكن إيجاد معادلة للسرعة المتجهه اللحظية عند أي زمن

تحقق من فهمك : ص 368-



5) تمثل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع الصاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسياً من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام . أوجد معادلة السرعة المتجهه اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن

تدرب: ص 369-



23) تمثل $s(t)$ في كل مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك.. أوجد معادلة السرعة المتجهه اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن :
 $s(t) = 14t^2 - 7$

34) **تحذ:** أوجد معادلة ميل مماس منحنى: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه

35) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة (يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط)؟. برر إجابتك

الواجب:

تحصيلي رياضيات

مامعادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند أي نقطة عليه؟			
$m = x$	(B)	$m = 4x$	(A)
$m = -4x$	(D)	$m = 2x$	(C)

مامعادلة ميل منحنى $y = x^5 + 3x - 2$ عند أي نقطة عليه؟			
$4x^4 + 3x$	(B)	$5x^4 + 3$	(A)
$x^4 + 3$	(D)	$x^4 + 1$	(C)

ما ميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند النقطة (3,34)؟			
27	(B)	-9	(A)
34	(D)	9	(C)

سقطت كرة بشكل رأسي ، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$ إذا كانت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h}$ تمثل السرعة المتجهة للكرة بعد 2s ، فكم تساوي هذه السرعة؟			
58ft/s	(B)	46ft/s	(A)
72ft/s	(D)	64ft/s	(C)

ميل المماس للدالة $f(x) = 2x - 5$ عند النقطة (1, -3)			
2	(B)	1	(A)
-5	(D)	-3	(C)

مامعادلة ميل منحنى $y = \sqrt{2x}$ عند أي نقطة عليه؟			
$\frac{\sqrt{2x}}{x}$	(B)	$\sqrt{2x+1}$	(A)
$\frac{1}{\sqrt{2x}}$	(D)	$\sqrt{2x} - \sqrt{x}$	(C)

ميل المماس للدالة $f(x) = x^2$ عند النقطة (1, 1)			
4	(B)	2	(A)
8	(D)	6	(C)

1 مشتقة دالة عند أي نقطة

المشتقات

يقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة
الدالة f بالنسبة للمتغير x
أو f prime of x



تُسمى دالة المماس التي أوجدناها سابقاً "دالة مشتق" أو "مشتقة الدالة"

ويُرمز لها بالرمز $f'(x)$

وتُسمى عملية إيجاد المشتقة بالاشتقاق وتُسمى النتيجة معادلة تفاضلية.

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

تحقق من فهمك : ص 372 -



$$f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1,4 \text{ (1B)}$$

$$f(x) = 6x^2 + 7, x = 2,5 \text{ (1A)}$$

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

تدرب: ص 378 -



$$g(t) = -t^2 + 2t + 11, t = 5,3 \text{ (2)}$$



يرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضاً بالرموز $y', \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$

وإذا سبق المعادلة المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة

قاعدة مشتقة القوى (2)

مشتقة العدد الثابت

إذا كانت $f(x) = c$
فإن $f'(x) = 0$
حيث c عدد ثابت

مشتقة القوة

إذا كان $f(x) = x^n$
فإن $f'(x) = nx^{n-1}$
حيث n عدد حقيقي



تنبيه (مشتقات القوى السالبة)

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$
تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدا من الأس لنحصل على:
 $-4 - 1 = -4 + (-1) = -5$
لذا فإن $f'(x) = -4x^{-5}$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

تحقق من فهمك: ص 373-



$$m(x) = \frac{1}{x^5} \quad (2C)$$

$$k(x) = \sqrt{x^3} \quad (2B)$$

$$j(x) = x^4 \quad (2A)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

تدرّب: ص 377-



المشتقات

إذا كانت: $f(x) = x$
فإن: $f'(x) = 1$
وإذا كانت: $f(x) = cx$
فإن: $f'(x) = c$



$$y(f) = -11f(6)$$

مشتقة المجموع أو الفرق

 إذا كانت $f(x) = g(x) + h(x)$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) \text{ فإن}$$

مشتقة مضاعفات القوة

 إذا كانت $f(x) = cx^n$ فإن $f'(x) = cnx^{n-1}$

 حيث c ثابت، n عدد حقيقي

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

تحقق من فهمك: ص 374-



$$f(x) = \frac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x} \quad (3C)$$

$$g(x) = 3x^4(x + 2) \quad (3B)$$

$$f(x) = 2x^5 - x^3 - 102 \quad (3A)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

تدرّب: ص 377-



$$n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4 \quad (10)$$

$$b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}} \quad (9)$$

$$z(n) = 2n^2 + 7n \quad (7)$$

السرعة المتجهة اللحظية

تحقق من فهمك: ص 374-



(4) الدالة $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت رأسياً إلى أعلى، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية لكرة عند أي زمن؟

تدرّب: ص 377-



(14) تعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة: $f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم،

(a) أوجد معادلة تمثل معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة.

(b) أوجد معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة عندما: $h = 2, 14, 20$

(c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة: $0 \leq h \leq 24$

5 القيمتان العظمى والصغرى للدالة

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ وذلك إما عند إحدى طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.

النقطة الحرجة / هي النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة تساوي صفراً أو غير موجودة

دالة كثيرة الحدود

مجال تعريف دالة كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية لذلك إذا كانت المشتقة دالة كثيرة حدود ، فإن النقاط الحرجة توجد فقط عندما تكون المشتقة صفراً.

ولذلك عند إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة كثيرة حدود $f(x)$ على فترة $[a, b]$ نجد قيم الدالة عند طرفي الفترة وعند أي قيمة لـ x عندها $f'(x) = 0$



تحقق من فهمك : ص 375 -



5) الدالة $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$

تمثل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة ، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبل مطاطي) حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$ أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة ، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة.

تدرب: ص 369 -



$$f(x) = t^4 + 6t^2 - 2, [1, 4] \quad (16)$$

$$f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0] \quad (15)$$

مشتقة الضرب

قاعدة مشتقة الضرب

6

 إذا كانت مشتقة كل من الدالتين f, g موجودتين عند x فإن

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

قاعدة مشتقة الضرب



ينتج عن قاعدة مشتقة الضرب مقدار يمكن تبسيطه ويمكنك أيضا تركه على حاله من دون تبسيط ما لم تكن في حاجة إلى تبسيطه

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

تحقق من فهمك: ص 376-



$$h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3) \quad (6B)$$

$$h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18) \quad (6A)$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

تدرّب: ص 377-



$$s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t) \quad (24)$$

$$g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x) \quad (23)$$

1 مشتقة دالة عند أي نقطة

المشتقات

يقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة
الدالة f بالنسبة للمتغير x
أو f prime of x



تُسمى دالة المماس التي أوجدناها سابقاً "دالة مشتق" أو "مشتقة الدالة"

ويُرمز لها بالرمز $f'(x)$

وتُسمى عملية إيجاد المشتقة بالاشتقاق وتُسمى النتيجة معادلة تفاضلية.

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

تحقق من فهمك : ص 372 -



$$f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1,4 \text{ (1B)}$$

$$f(x) = 6x^2 + 7, x = 2,5 \text{ (1A)}$$

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

تدرب: ص 378 -



$$g(t) = -t^2 + 2t + 11, t = 5,3 \text{ (2)}$$



يرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضاً بالرموز $y', \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$

وإذا سبق المعادلة المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة

مهارات التفكير العليا: ص 379-

(35) تحد: أوجد $f'(y)$ علما بأن:

$$f(y) + 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$$

.....

.....

.....

.....

46) اكتشف الخطأ: قام كل من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$ حيث كانت إجابة عبدالله:

$$144x^3 + 144x^2 + 32x$$

$$16 + 96x + 144x^2$$

برر إجابتك

.....

.....

.....

.....

الواجب:



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تحصيلي رياضيات

ما مشتقة $h(x) = (-7x^2 + 4)(2 - x)$ ؟				1
$h'(x) = 14x$	(B)	$h'(x) = -14x$	(A)	
$h'(x) = 21x^2 - 28x - 4$	(D)	$h'(x) = -21x^2 - 28x + 4$	(C)	
ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة (1,2)				2
2	(B)	1	(A)	
8	(D)	4	(C)	
ما مشتقة: $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$ ؟				3
$f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$	(B)	$f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$	(A)	
$f'(x) = 225x^{\frac{8}{3}}$	(D)	$f'(x) = 255x^{\frac{5}{3}}$	(C)	
مشتقة الدالة: $f(x) = -2$ تساوي ...				4
0	(B)	-2	(A)	
$2x$	(D)	2	(C)	
إذا كانت: $g(x) = \sqrt[5]{x^9}$ فإن $g'(x)$ تساوي ...				5
$5^4\sqrt{x^9}$	(B)	$9\sqrt[5]{x^8}$	(A)	
$\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$	(D)	$\frac{5}{9}\sqrt[5]{x^4}$	(C)	
إذا كانت: $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$ فإن مشتقة الدالة $f(x)$ تساوي ...				6
$6x^2 - 5$	(B)	$3x - 5$	(A)	
$6x - 5$	(D)	$6x^2 - 5x$	(C)	
إذا كانت: $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{1}{2}} - 10$ فإن $f'(x)$ تساوي ...				7
$4\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$	(B)	$4x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}}$	(A)	
$4\sqrt[4]{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$	(D)	$3x^{\frac{7}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}}$	(C)	
ما مشتقة الدالة: $f(x) = 15x^2 - 5x + 7$ عند $x = 1$ ؟				8
25	(B)	32	(A)	
10	(D)	17	(C)	

تحصيلي رياضيات

للدالة: $f(x) = 8x - x^2 + 30$ نقطة حرجة عندما x تساوي ...				9
$-\frac{1}{4}$	(B)		-4 (A)	
4	(D)		$\frac{1}{4}$ (C)	
إذا كانت $f(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$ فإن $f'(x)$ تساوي ...				10
$x^2 - 8$	(B)		$4x^2 - 10x$ (A)	
$2x^2 - 10x - 4$	(D)		$6x^2 - 10x - 8$ (C)	
إذا كانت $f(x) = \frac{7}{x+5}$ فإن $f'(x)$ تساوي ...				11
$\frac{7}{x+5}$	(B)		$\frac{-7}{x+5}$ (A)	
$\frac{7}{(x+5)^2}$	(D)		$\frac{-7}{(x+5)^2}$ (C)	
ما المشتقة السادسة للدالة: $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 7x - 12$ ؟				12
0	(B)		-1 (A)	
3	(D)		1 (C)	
ما المشتقة الثانية للدالة: $f(x) = 2x^5 - x^3 + 6$ ؟				13
$40x^4 - 6x$	(B)		$10x^4 - 3x^2$ (A)	
$40x^3 - 6x$	(D)		$40x^3 - 6$ (C)	
إذا كانت $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{2-x}$ فإن $f(4)$ تساوي ...				14
$\frac{15}{6}$	(B)		$\frac{31}{8}$ (A)	
$\frac{16}{4}$	(D)		$\frac{5}{2}$ (C)	

1 المساحة تحت المنحنى باستعمال المستطيلات



العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية

مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد ..

يمكننا تقريب حساب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة **كالمستطيل**

تحقق من فهمك : ص 381-



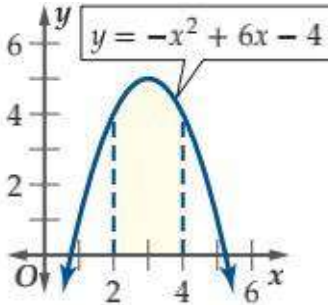
1) قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 12, 8, 6 مستطيلا على الترتيب . استعمل الطرف الأيمن لقاعد كل مستطيل لتحديد ارتفاعه

قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملا الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كل من الأشكال أدناه:

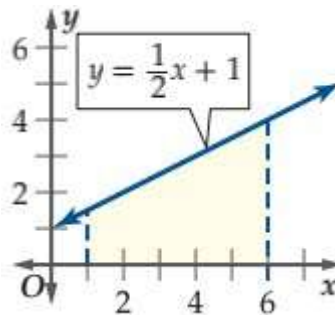
تدرب: ص 387-



(2) 4 مستطيلات الطرف الأيسر



(1) 5 مستطيلات الطرف الأيمن



المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

2



من الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين

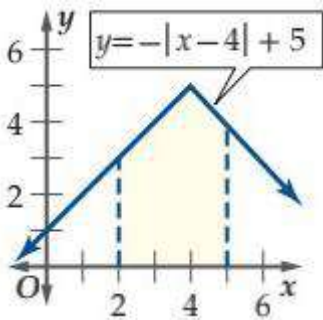
تحقق من فهمك : ص 382-



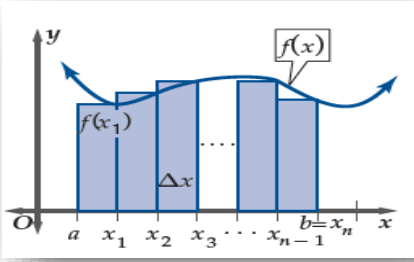
2) قرب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x على الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

قرب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في كل من الأشكال الآتية مستعملا الأطراف اليمنى ثم اليسرى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كل منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين.

تدرّب: ص 387-



العرض 0.5 (7)



التجزئ المنتظم: تقسيم الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول

$$A = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

المساحة الكلية للمستطيلات

التكامل المحدد

يعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة [a, b] بالصيغة

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i \Delta x$$

حيث a الحد الأدنى و b الحد الأعلى، وتسمى هذه الطريقة **مجموع ريمان الأيمن**

صيغ المجاميع

$$\sum_{i=1}^n c = cn, \text{ عدد ثابت } c$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

تنبيه (المجموع)

إن مجموع عدد ثابت c هو cn فمثلا

$$\sum_{i=1}^n 5 = 5n$$



رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x) dx$

التكامل من a إلى b للدالة f(x) بالنسبة لـ x

خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i, \quad \sum_{i=1}^n ci = c \sum_{i=1}^n i, \text{ عدد ثابت } c$$

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x
والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 384-



$$\int_0^1 3x^2 dx \text{ (3A)}$$

$$\int_0^3 x dx \text{ (3B)}$$

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x
والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

تدرب: ص 387-



$$\int_0^2 6x \, dx \quad (11)$$

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x
والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك: ص 385-



$$\int_1^3 x^2 \, dx \quad (4A)$$

$$\int_2^4 x^3 dx \text{ (4B)}$$

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x
والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

تدرب: ص 387-



$$\int_1^4 4x^2 dx \text{ (10)}$$

المساحة تحت منحنى

5

تحقق من فهمك : ص 386-



5) لدى عبدالله كمية من الطلاء تكفي لطلاء 30ft^2 ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تعطى بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2) dx$ ؟ برر إجابتك

تدرب: ص 387-



18) ارجع إلى فقرة لماذا في بداية الدرس. إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب ، فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل $\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x) dx$

31) **اكتشف الخطأ:** سئل ماجد وخالد عن دقة تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات ، فأجاب ماجد: إنه عند تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات اليمنى ، فإن المساحة الناتجة تكون أكبر دائماً من المساحة الحقيقية تحت المنحنى . في حين أجاب خالد : إن المساحة المحسوبة باستعمال أطراف المستطيلات اليسرى تكون أكبر دائماً من المساحة الحقيقية تحت المنحنى أيهما كانت إجابته صحيحة ؟ برر إجابتك

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الواجب:



.....

.....

.....

.....

.....

.....

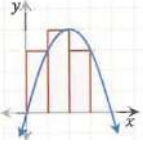
.....

.....

.....

.....

تحصيلي رياضيات

ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y = -x^2 - 3x + 6$ والمحور x في الفترة $[2, 6]$ ؟				1
90 وحدة مربعة تقريبا	(B)		93.33 وحدة مربعة تقريبا (A)	
52 وحدة مربعة تقريبا	(D)		86.67 وحدة مربعة تقريبا (C)	
أي مما يأتي يمثل مشتقة $n(a) = \frac{4}{a} - \frac{5}{a^2} + \frac{3}{a^4} + 4a$ ؟				2
$n'(a) = 4a^2 - 5a^3 + 3a^4 + 4$	(B)		$n'(a) = 8a - 5a^2 + 3a^4$ (A)	
$n'(a) = \frac{-4}{a^2} + \frac{10}{a^3} - \frac{12}{a^5} + 4$	(D)		$n'(a) = \frac{-4}{a^2} + \frac{5}{a^3} - \frac{3}{a^5} + 4$ (C)	
ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5x + 6}$ ؟				3
$\frac{3}{15}$	(B)		$\frac{1}{15}$ (A)	
$\frac{4}{15}$	(D)		$\frac{2}{15}$ (C)	
عند إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 2$ ومحور x على الفترة $[-2, 8]$ باستعمال 30 مستطيلا، فإن عرض كل مستطيل يساوي				4
$\frac{1}{3}$	(B)		$\frac{1}{2}$ (A)	
1	(D)		$\frac{1}{5}$ (C)	
عند تقريب المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 4$ ومحور x على الفترة $[1, 10]$ باستعمال مستطيلات، عرض كل منها 0.5 فإن عدد المستطيلات يساوي				5
18	(B)		20 (A)	
14	(D)		16 (C)	
ما مساحة التقريبية المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ الممثلة بالشكل والمحور x ؟				6
				
10	(B)		6 (A)	
24	(D)		12 (C)	

إيجاد الدوال الأصلية

1

الدالة الأصلية $F(x)$ هي الدالة العكسية للمشتقة $f'(x)$

هناك عدد لا نهائي من الدوال الأصلية لأي دالة، والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحتوي على الثابت C

أوجد دالتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 389-



$-3x^{-4}$ (1B)

.....

.....

.....

$2x$ (1A)

.....

.....

.....

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

تدرب: ص 394-



$f(z) = \sqrt[3]{z}$ (2)

.....

.....

.....

$f(x) = x^5$ (1)

.....

.....

.....

قواعد الدالة الأصلية

2

قاعدة المجموع والفرق

إذا كان $f(x), g(x)$ دالتان أصليتان هما

$G(x), F(x)$

على الترتيب فإن $F(x) \pm G(x)$

دالة أصلية لـ

$f(x) \pm g(x)$

قاعدة ضرب القوة في عدد ثابت

إذا كان $f(x) = kx^n$

حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ،

k عددا ثابتا فإن:

$$F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$$

قاعدة القوة

إذا كان $f(x) = x^n$

حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 فإن:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$



الدوال لأصلية

$F(x) = kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$ ، فمثلا، إذا كان $f(x) = 3$ فإن $F(x) = 3x$

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 390-



$f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ (2C)

.....

.....

.....

$f(x) = \frac{10}{x^3}$ (2B)

.....

.....

.....

$f(x) = 6x^4$ (2A)

.....

.....

.....

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

تدرّب: ص 394-



$$u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6d^2 + 3.5 \quad (5)$$

$$w(u) = \frac{2}{3}u^5 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{2}{5}u \quad (4)$$

التكامل غير المحدد

3


 يعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x)dx = F(x) + C$ حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ و C ثابت

تحقق من فهمك: ص 391-



3) عند قيام فني بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120ft سقطت محفظته نحو الأرض، وتمثل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

(A) أوجد دالة موقع المحفظة $S(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

(B) أوجد الزمن الذي تستغرقه المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

تدرّب: ص 394-



7) ارجع إلى فقرة لماذا؟ في بداية الدرس. افترض أن القلم قد استغرق 2s حتى الوصول إلى سطح الأرض.

(a) أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t dt$

(b) احسب قيمة C عندما $t = 2s$, $S(t) = 0$

(c) ما ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5s من سقوطه؟

التكامل المحدد



إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x) \Big|_a^b$

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 392-



$$\int_1^2 (16x^3 - 6x^2) dx \quad (4B)$$

$$\int_2^5 3x^2 dx \quad (4A)$$

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

تدرب: ص 394-



$$\int_2^5 (a^2 - a + 6) da \quad (10)$$

$$\int_1^4 2x^3 dx \quad (9)$$

التكاملات المحددة وغير المحددة

5



تنبيه صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد، لأنه جزء من الدالة الأصلية

احسب كل تكامل مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 393-



$$\int (6x^2 + 8x - 3) dx \quad (5A)$$

$$\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4) dx \quad (5B)$$

.....

.....

.....

.....

.....

احسب كل تكامل مما يأتي:

تدرب: ص 394-



$$\int_1^3 \left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}h^3 - \frac{1}{5}h^4 \right) dh \quad (11)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\int (6m + 12m^3) dm \quad (8)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

من التطبيقات على التكامل المحدد

6

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

تحقق من فهمك: ص 393-



$$\int_0^{1.4} 512x dx \quad (6B)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\int_0^{0.7} 476x dx \quad (6A)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7) تعطى قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية (a) أوجد دالة الموقع $S(t)$ للحشرة ثم احسب قيمة C بفرض أنه عندما $t = 0$ فإن $S(t) = 0$ (b) أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟

مهارات التفكير العليا: ص 395-

31) **تجد:** احسب قيمة $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ حيث r عدد ثابت

تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائماً ، أو صحيحة أحياناً ، أو غير صحيحة أبداً. برر إجابتك:

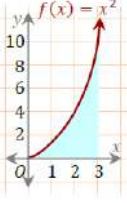
$$\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx \quad (32)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx \quad (33)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{|b|}^{|a|} f(x) dx \quad (34)$$

الواجب:

تحصيلي رياضيات

إذا كان $\int_0^2 kx dx = 6$ ، فما قيمة k				1
2	(B)	1	(A)	
4	(D)	3	(C)	
إذا كان $\int_1^n 4x^3 dx = 15$ فما قيمة n ؟				2
2	(B)	$\frac{1}{4}$	(A)	
8	(D)	4	(C)	
إذا كان $\int_0^4 (x + k) dx = 20$ فما قيمة k ؟				3
-3	(B)	-7	(A)	
7	(D)	3	(C)	
 <p>ما المساحة المحصورة بين منحنى الدالة : $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0,3]$ ؟</p>	4			
1		(B)	0	(A)
9		(D)	3	(C)
... $\int 10x^{-3} dx$ يساوي				5
$-5x^{-4} + c$	(B)	$-5x^{-2} + c$	(A)	
$5x^{-4} + c$	(D)	$5x^{-2} + c$	(C)	
التكامل $\int_2^3 (4x + 1) dx$ يساوي...				6
11	(B)	10	(A)	
21	(D)	20	(C)	
... $\int (4x + 5) dx$ يساوي				7
4	(B)	$4x + 5 + C$	(A)	
$4x^2 + 5x + C$	(D)	$2x^2 + 5x + C$	(C)	

انتهى الفصل الدراسي الثالث

