

تم تحميل وعرض المادة من

منهجي

mnhaji.com



موقع منهجي منصة تعليمية توفر كل ما يحتاجه المعلم
والطالب من حلول الكتب الدراسية وشرح للدروس
بأسلوب مبسط لكافة المراحل التعليمية وتوزيع
المناهج وتحضير وملخصات ونماذج اختبارات وأوراق
عمل جاهزة للطباعة والتحميل بشكل مجاني

حمل تطبيق منهجي ليصلك كل جديد





ملخص

مادة الرياضيات

ثالث متوسط

الفصل الدراسي الثاني

الفصل الخامس أنظمة المعادلات الخطية

٥-١ حل نظام من معادلتين
خطيتين بيانياً

٥-٢ حل نظام من معادلتين
خطيتين بالتعويض

٥-٣ حل نظام من معادلتين
خطيتين بالحذف باستعمال
الجمع أو الطرح

٥-٤ حل نظام من معادلتين
خطيتين بالحذف باستعمال الضرب

٥-٥ تطبيقات على النظام
المكون من معادلتين خطيتين



تذكر:

التمثيل البياني للمعادلات الخطية

ماذا سأتعلم؟

- ✓ أعرف عدد حلول نظام مكون من معادلتين خطيتين
- ✓ أحل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانياً

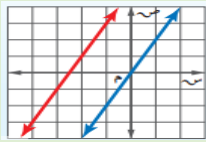
٥-١ حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً



عدد الحلول الممكنة عند حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً

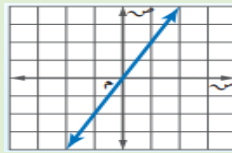


لا يوجد حل
غير متسق



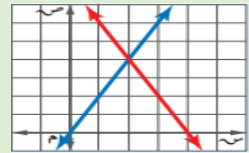
المستقيمان متوازيان

عدد لانهائي من الحلول
متسق وغير مستقل



المستقيمان متطابقان

حل واحد فقط
متسق ومستقل



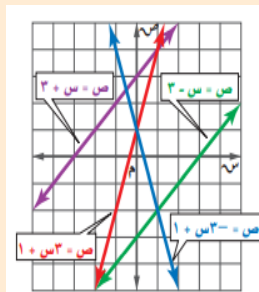
المستقيمان متقاطعة
في نقطة واحدة

من التمثيل البياني التالي حدد ما إذا كل نظام فيما يأتي متسقاً أم غير متسق ، ومستقلاً أم غير مستقل

$$3x + 2y = 6$$

$$3x - 2y = 6$$

بما أن المستقيمان متوازيان فلا يوجد حل للنظام ويكون النظام غير متسق



$$3x - 1 = 3x + 1$$

$$3x + 1 = 3x + 1$$

بما أن المستقيمان متقاطعة في نقطة واحدة ، فهناك حل واحد فقط ويكون النظام متسق مستقل

مثل كل نظام مما يأتي بيانياً وأوجد حلوله وإذا كان واحداً فاكتبه

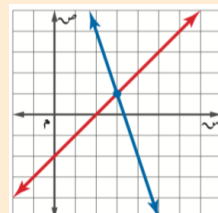
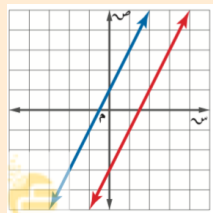
$$2x - 3y = 1$$

$$4x - 2y = 7$$

$$3x - 10 = 3x + 10$$

$$3x = 2$$

بما أن للمعادلتين اميل نفسه ومقطعاهما الصاديان مختلفان فالمستقيمان امثلان للمعادلتين متوازيان وبما أنهما لا يتقاطعان في أي نقطة فلا يوجد حل للنظام



يظهر من التمثيل البياني ان المستقيمان يتقاطعان في النقطة (٣، ١) ويمكن التحقق من ذلك بالتعويض عن س ب ٣ وعن ص ب ١ ونجد أنها صحيحة إذاً للنظام حل واحد وهو (٣، ١)



تذكر:

حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بيانياً

٥-٢ حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

ماذا سأتعلم؟

- ✓ أحل نظام مكون من معادلتين بالتعويض
- ✓ أحل مسائل من واقع الحياة باستعمال التعويض



حل نظام بالتعويض

مثلاً: استعمال التعويض لحل النظام التالي $2 - \text{ص} = \text{س}$ ، $4\text{س} + \text{ص} = 2$

بما أن المعادلة الأولى محلولة بالنسبة لـ س أعوض في المعادلة الثانية عن س بـ $(2 - \text{ص})$

$$4 = \text{ص} + (2 - \text{ص})$$

$$4 = \text{ص} + 2 - \text{ص}$$

$$2 = 2$$

ثانياً: أعوض في المعادلة الأولى عن ص بـ (2)

$$2 - 2 = \text{س}$$

$$0 = \text{س}$$

إذاً الحل هو $(2, 0)$

إذا كانت نتيجة حل نظام من معادلتين جملة خطأ مثل $7 = 3$ فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة أما إذا كانت النتيجة متطابقة مثل $4 = 4$ فهناك عدد لانهائي من الحلول

مثلاً: $3 - \text{س} = \text{ص}$

$8 = \text{ص} - \text{س}$

الحل / نعوض عن ص بـ $(3 - \text{س})$

$$8 = (3 - \text{س}) - \text{س}$$

$$8 = 3 - \text{س} - \text{س}$$

بما أن الجملة الناتجة خطأ لذا لا يوجد حل

للنظام

مثلاً: $4 - \text{س} = \text{ص}$

$12 = \text{ص} + 3\text{س}$

الحل / نعوض عن ص بـ $(4 - \text{س})$

$$12 = (4 - \text{س}) + 3\text{س}$$

$$12 = 4 - \text{س} + 3\text{س}$$

الجملة الناتجة تشكل متطابقة، لذا يوجد عدد لا

نهائي من الحلول

كتابة نظام من معادلتين وحله باستعمال التعويض

إذا كان مجموع قياسي الزاويتين س ، ص يساوي 180° ، وقياس الزاوية س يزيد بمقدار 24° على قياس الزاوية ص . (١) أكتب نظام من معادلتين لتمثيل هذا الموقف

الحل / النظام لهذا الموقف $180 = \text{ص} + \text{س}$ ، $24 + \text{ص} = \text{س}$

(٢) أوجد قياس كل زاوية؟ بالتعويض عن س بـ $(24 + \text{ص})$ في المعادلة الأولى $180 = 24 + \text{ص} + \text{ص}$

$$180 = 24 + \text{ص} + \text{ص} \leftarrow 156 = 2\text{ص} \leftarrow \text{ص} = 78^\circ$$

ثم نعوض عن ص بـ (78) في المعادلة الثانية $24 + \text{ص} = \text{س} \leftarrow 24 + 78 = \text{س} \leftarrow \text{س} = 102^\circ$



تذكر:

حل نظام معادلتين بالتعويض

٣-٥ حل نظام من معادلتين خطيتين بال حذف باستعمال الجمع أو الطرح

ماذا سأتعلم؟

- ✓ حل نظام من معادلتين باستعمال طريقة الحذف بالجمع
- ✓ حل نظام من معادلتين باستعمال طريقة الحذف بالطرح



الحذف بالطرح

الحذف بالجمع

استعمل الحذف لحل النظام

$$أ + ٤ = ب - ٤$$

$$١٦ - = ب + ١٠$$

الحل / أطرح المعادلتين

$$\begin{array}{r} أ + ٤ = ب - ٤ \\ - \\ ١٦ - = ب + ١٠ \\ \hline ١٢ = ب - ٦ \end{array}$$

$$\frac{١٢}{٦-} = ب \frac{٦-}{٦-}$$

$$ب = ٢ -$$

أعوض عن ب ب (٢-) في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة أ

$$أ + ٤ = (٢-) - ٤ \leftarrow أ = ٤$$

الحل هو (٢-, ٤)

استعمل الحذف لحل النظام

$$٤ = ص + س$$

$$٨ = ص - س$$

الحل / أجمع المعادلتين

$$\begin{array}{r} ٤ = ص + س \\ + \\ ٨ = ص - س \\ \hline ١٢ = ٢ص \end{array}$$

$$\frac{١٢}{٢} = ص \frac{٢}{٢}$$

$$ص = ٦ \leftarrow$$

أعوض عن ص ب (٦) في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة س

$$٤ = ص + ٦ \leftarrow ص = ٢ -$$

الحل هو (٢-, ٦)

كتابة نظام من معادلتين وحله بالحذف (الجمع أو الطرح)



مثلاً: ما العدداً اللذان مجموعهما ٢٤ وخمسة أمثال الأول ناقص الثاني يساوي ١٢؟

الحل / نفرض أن العدداً هما ص، س

$$٢٤ = ص + س$$

$$١٢ = ص - ٥س$$

أجمع المعادلتين

$$٢٤ = ص + س$$

$$١٢ = ص - ٥س$$

$$٣٦ = ٦ص \leftarrow ص = ٦$$

بالتعويض عن ص ب (٦) في إحدى المعادلتين $٢٤ = ص + ٦ \leftarrow ص = ١٨$

إذا العدداً هما (٦، ١٨)

تذكر:



حل نظام من معادلتين
بالحذف باستخدام الجمع
أو الطرح

٥-٤ حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف باستخدام الضرب

ماذا سأتعلم؟

- ✓ أحل نظام من معادلتين بالحذف باستخدام الضرب
- ✓ أحل مسائل من واقع الحياة تتضمن أنظمة من معادلتين



ضرب كلتا المعادلتين لحذف أحد المتغيرين

ضرب أحد المعادلتين لحذف أحد متغيرين

استعمل الحذف لحل النظام

$$29 = 3س + 4ص$$

$$43 = 6س + 5ص$$

أضرب المعادلة الأولى في (٦)

والمعادلة الثانية في (٣) فيصبح النظام

$$174 = 18س + 24ص$$

$$129 = 18س + 15ص$$

$$45 = 9ص$$

$$0 = 3ص$$

ثم التعويض عن ص في إحدى المعادلات

(باختيار المعادلة الأولى)

$$29 = 3س + 4(0) \quad 29 = 3س$$

$$9 = 3س \quad 3 = س$$

الحل هو (٣، ٥)

استعمل الحذف لحل النظام

$$11 = 2س + 5ص$$

$$1 = 3س + 4ص$$

أضرب المعادلة الأولى في (٢) فيصبح النظام

$$22 = 4س + 10ص$$

$$4 = 3س + 1ص$$

$$7 = 7ص$$

$$3 = 3ص$$

ثم التعويض عن ص في إحدى المعادلات

(باختيار المعادلة الأولى)

$$11 = 2س + 5(3) \quad 11 = 2س + 15$$

$$-4 = 2س \quad -2 = س$$

الحل هو (٢، ٣)

كتابة نظام من معادلتين وحله باستخدام الحذف بالضرب

مثلاً: ما العدداً اللذان سبعة أمثال أحدهما زائد ثلاثة أمثال الآخر يساوي سالب واحد

ومجموعهما يساوي سالب ثلاثة؟

$$7س + 3ت = -1, \quad 3س + ت = -3$$

لحل النظام نضرب المعادلة الثانية في ٧ ثم نطرح

$$21س + 7ت = -21$$

$$-20 = 4س$$

$$-5 = س$$

أعوض عن س في إحدى المعادلات (باختيار المعادلة الثانية)

$$7س + 3ت = -1 \quad 7(-5) + 3ت = -1 \quad 3ت = 34 - 35 \quad 3ت = -1 \quad 3 = -1 + 3ت \quad 4 = 3ت \quad 4/3 = ت$$

إذا العدداً هما (٢، ٥)



تذكر:

حل نظام من معادلتين بالتعويض أو الحذف

٥-٥ تطبيقات على النظام المكون من معادلتين خطيتين

ماذا سأتعلم؟

- ✓ أعدد افضل الطرق لحل نظام من معادلتين
- ✓ أحل مسائل تطبيقية على أنظمة المعادلات الخطية



تعلمنا سابقاً خمس طرائق لحل أنظمة لحل المعادلات الخطية والجدول أدناه بين أفضل حالة لاستعمال كلٍّ منها

الطريقة	أفضل حالة لاستعمالها
التمثيل البياني	لتقدير الحلول فالتمثيل البياني غالباً لا يعطي حل دقيق
التعويض	إذا كان معامل أحد المتغيرين في إحدى المعادلتين ١ أو -١
الحذف بالجمع	إذا كان كل من معاملي أحد المتغيرين في المعادلتين معكوساً جمعياً للأخر
الحذف بالطرح	إذا كان معاملا أحد المتغيرين في المعادلتين متساويين
الحذف بالضرب	إذا لم يكن أي من المعاملات ١ أو -١ وليس من السهل التخلص من المتغيرين بجمع المعادلتين أو طرحهما

تطبيق أنظمة المعادلات الخطية في المسائل

آثار: يبلغ مجموع مساحتي قصر ابن الشعلان في القربات وقصر صاهود في الاحساء نحو ١٣٠٠٠ متر مربع ، وتزيد مساحة قصر صاهود على مثلي مساحة قصر ابن شعلان بنحو ٤٠٠٠ متر مربع ، أوجد مساحة كل قصر منها

الحل / نفرض أن مساحة قصر ابن شعلان هي x ومساحة قصر صاهود هي y

$$x + y = 13000$$

$$2x + y = 4000$$

$$\frac{9000}{3} = x \quad \text{بقسمة الطرفين على ٣}$$

$$x = 3000 \quad \text{(مساحة قصر ابن شعلان)}$$

أعوض عن x في إحدى المعادلات

$$3000 + y = 13000$$

$$y = 10000 \quad \text{(مساحة قصر صاهود)}$$

مثلاً: حدد أفضل طريقة لحل الأنظمة الآتية : ثم حلها

$$9 = x - y$$

$$7 = x + y$$

أفهم / لتحديد أفضل طريقة لحل نظام من

معادلتين أنظر الى معاملي كل حد

خطي / بما أن أحد معاملي x في إحدى

المعادلتين معكوساً جمعياً لمعاملها في المعادلة

الأخرى إذن استعمل الحذف بالجمع

$$\text{حل / } \begin{array}{r} 9 = x - y \\ + \\ 7 = x + y \\ \hline 16 = 2x \end{array}$$

$$8 = x$$

$$16 = 2x$$

اقسم الطرفين على ٨ ← $x = 2$

أعوض عن x في إحدى المعادلات

$$9 = x - y \quad \leftarrow \quad 9 = 2 - y$$

$$\text{الحل هو } (2, -7)$$

الفصل السادس: كثيرات الحدود

عنوان الدرس

ضرب وحيدات الحد

قسمة وحيدات الحد

كثيرات الحدود

جمع كثيرات الحدود
وطرحها

ضرب وحيدة الحد في كثيرة
حدود

ضرب كثيرات الحدود

حالات خاصة من ضرب
كثيرات الحدود

ماذا سأتعلم؟!

- أضرب وحدات الحد
- أبسط عبارات تتضمن وحدات الحد.

٦-١ ضرب وحدة الحد

تذكر:

إجراء العمليات على العبارات الأسية.

وحدات الحد: هي عبارة عن عدد أو متغير أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة.



٢٣ : وحدة حد لأنها عدد.

٥س : وحدة حد لأنها حاصل ضرب عدد في متغير.

$\frac{٥س^٢}{ص}$ ليست وحدة حد لأنها تتضمن متغير في المقام .

٤ + ٥س : ليست وحدة حد لأنها تتضمن عملية الجمع لذا فهي مكونة من أكثر من حد

أمثلة

العمليات على وحدات الحد

قوة حاصل الضرب

لإيجاد قوة حاصل الضرب اجد قوة كل عامل.

مثال

$$\begin{aligned} & (٣س^٣ ص^٥) (٣س^٥ ص^٣) \\ & = (٣س^٣) (٣س^٥) (٣س^٥ ص^٣) \\ & = ٣٢٧س^{١٥} ص^٣ \end{aligned}$$

قوة القوة

لإيجاد قوة القوة نضرب الأسس.

مثال

$$\begin{aligned} & (٢ع)^٧ = ١٤ع \\ & [(٢ب)^٣]^٢ = ١٢ب \end{aligned}$$

ضرب القوى

لضرب قوتين لهما الأساس نفسه اجمع أسيهما.

مثال

$$\begin{aligned} & (٢س^٥) (٧س^٣) \\ & = (٧س^{٥+٣}) \\ & = ١٤س^٨ \end{aligned}$$

تبسيط العبارات التي تتضمن وحدات حد

مثال

$$\begin{aligned} & (-٢ج^٣ ه) (-٣ج^٤ ل^٢) (ج ه ل)^٢ \\ & = -٢ج^٣ ه (-٣ج^٤ ل^٢) (ج ه ل)^٢ \\ & = -٢(-٩) ج^٣ ج^٤ ه٢ ه ل^٢ ل^٢ \\ & = ١٨ج^٧ ه٢ ل^٤ \end{aligned}$$

تبسيط عبارة تتضمن وحدات حد يعني أن يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة. (١) لا تتضمن العبارة قوة قوة. (٢) تكون جميع الكسور في أبسط صورة. (٣)

ماذا ستعلم؟
 أبسط عبارات تحتوي أسساً سالبة أو صفرية.
 أجد ناتج قسمة وعيدتي حد.



تذكر:
 ضرب وعيدات الحد

٦-٢ قسمة وعيدات الحد

قوى القسمة
 لإيجاد قوة القسمة
 أوجد كلاً من قوة البسط وقوة المقام

مثال

$$\frac{12 \text{ سن}^{27} \cdot 3^3 (\text{سن}^4)^3 (3)^3}{64} = \frac{3^3 (\text{سن}^4)^3}{3^3 (4)} = \frac{3^3 (\text{سن}^4)^3}{3^3 (4)} = \left(\frac{\text{سن}^4}{4} \right)^3$$

قسمة القوى
 عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه أطرح أسيهما
 (أالبسط - أس المقام)

مثال

$$10 \text{ سن}^2 \div 5 \text{ سن}^8 = (2-8 \text{ سن}) \left(\frac{10}{5} \right) = \frac{2 \text{ سن}^2}{\text{سن}^8}$$

خاصية الأسس السالبة
 أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة سالبة
 يساوي مقلوب هذا العدد

مثال

$$\frac{2^4 \text{ ح}^2}{3^4 \text{ ف}^3} = \frac{2^4 \text{ ح}^2}{3^4 \text{ ه}^{-3}}$$

خاصية الاس الصغري
 أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة صغريساوي واحد

مثال

$$1 = (2^2) \\ 1 = (12)$$

رتبة المقدار

تستعمل رتبة المقدار مقارنة المقادير وتقدير الحسابات وإجرائها بسرعة وتعبر عن العدد مقرباً إلى أقرب قوى العشرة

مثلاً العدد ٩٥٠٠٠٠ مقرباً إلى أقرب قوى العشرة هو ١٠ أو ١٠٠٠٠٠٠ لذا فإن رتبة المقدار ٩٥٠٠٠٠ هي ٦١٠

ماذا سأتعلم؟

- ✓ أجد درجة كثيرة الحدود
- ✓ أكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية .



٦-٣ كثيرات الحدود

تذكر:

تميز وحدات الحد وخصائصها



كثيرة الحدود: هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد، وتسمى كل وحيدة حد منها حداً في كثيرة الحدود



وبعض كثيرات الحدود تحمل أسماء خاصة منها

ثلاثية الحدود

هي عبارة عن مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل
مثل: $٨ + ٣س + ٢س^٢$

ثنائية الحدود

هي عبارة عن مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل
مثل: $٣ + ٥س$

وحيدة الحد

هي عبارة عن عدد أو متغير أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر
مثل: $٥س$

كثيرات الحدود بالصورة القياسية

الصيغة القياسية لكثرة الحدود
كتابة الحدود بالترتيب التنازلي حسب درجتها

المعامل الرئيس

معامل أول حد لكثيرة الحدود بعد كتابتها بالصيغة القياسية

مثال: أكتب كثيرة الحدود $٣س^٤ + ٢س^٥ + ٤س^٣ + ٨س + ١٢$

بالصيغة القياسية وحدد المعامل الرئيس
الحل: الخطوة الأولى: احدد درجة كل حد

$$\begin{array}{cccc} & ١ & ٤ & ٢ \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ ١٢ + & ٨س + & ٤س^٣ + & ٢س^٥ \end{array}$$

الخطوة الثانية: أكتب الحدود بالترتيب التنازلي لدرجاتها

$$٢س^٥ + ٤س^٣ + ٨س + ١٢$$

فيكون المعامل الرئيس هو ٤

درجة كثيرة الحدود

إذا كانت وحيدة حد

درجتها هي مجموع أسس كل متغيراتها

مثال: $٢س^٣$ صن

من الدرجة الرابعة لان مجموع الأسس $(٣ + ١) = ٤$

إذا كانت كثيرة حدود

توجد درجة كل حد من كثيرة الحدود وأعلى درجة منها هي درجة كثيرة الحدود مع العلم ان درجة الثابت تساوي صفر

مثال: $٢س + ٣س^٣ + ٤س^٢$

الحد الأول: $٤س^٢$ من الدرجة الأولى

الحد الثاني: $٣س^٣$ من الدرجة الثالثة

الحد الثالث: ٢ (حد ثابت) درجته صفر

أعلى درجة منها الثالثة

إذن كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة

ماذا سأتعلم؟!

- ✓ أجمع كثيرات حدود
- ✓ أطرح كثيرات حدود



تذكر:



كتابة كثيرات الحدود
بالصورة القياسية.

٦-٤ جمع كثيرات الحدود

جمع كثيرات الحدود

يتم جمع كثيرات الحدود بجمع الحدود المتشابهة

مثال: $(1 + 6x + 4x^2) + (7 + 5x + 3x^2)$

بجمع الحدود المتشابهة $[1+7] + [6x+5x] + [4x^2+3x^2]$

$$8 + 11x + 7x^2 =$$

طرح كثيرات الحدود

يمكن طرح كثيرة الحدود بإضافة نظيرها الجمعي

مثال: $(2 + 3x + 2x^2) - (9 + 6x + 4x^2)$

= $(2 - 9) + (3x - 6x) + (2x^2 - 4x^2)$ بإضافة النظير الجمعي

= $[2-9] + [3x-6x] + [2x^2-4x^2]$ بجمع الحدود المتشابهة

$$= 7 + 3x + 2x^2$$

ماذا سأتعلم؟

- ✓ أضرب وعيدة حد في كثيرة حدود
- ✓ أحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وعيدات حد في كثيرات حدود



تذكر:



ضرب وعيدات الحد.

٦-٥ ضرب وعيدة الحد في كثيرة حدود

ضرب وعيدة حد في كثيرة حدود

لإيجاد حاصل ضرب كثيرة حدود في وعيدة حد نستعمل

خاصية التوزيع

$$\text{مثال: } ٢س(٥س+٧)$$

$$= ٢س(٥س) + ٢س(٧) \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= ١٠س٢ + ١٤س \quad \text{بالضرب}$$

تبسيط العبارات التي تتضمن ضرب كثيرات الحدود

$$\text{مثال: } ٤د(٥د+٣) - ٢(٢د+٩)$$

$$= ٤د(٥د) + ٤د(٣) - ٢(٢د) - ٢(٩) \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= ٢٠د٢ + ١٢د - ٤د - ١٨ \quad \text{بالضرب}$$

$$= ٢٠د٢ + ٨د - ١٨ \quad \text{خاصية التجميع}$$

$$= ١٦د٢ + ٨د - ١٨ \quad \text{بتجميع الحدود المتشابهة}$$

معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها

نستطيع حل معادلات تتضمن حاصل ضرب وعيدة حد بكثيرة حدود باستعمال خاصية التوزيع

$$\text{مثال: } ٣س(٣س+٤) - ٩س(٤س-١) = ١٦$$

$$٣س(٣س) + ٣س(٤) - ٩س(٤س) - ٩س(-١) = ١٦ \quad \text{بالتوزيع}$$

$$٩س٢ + ١٢س - ٣٦س٢ + ٩س = ١٦ \quad \text{بالضرب}$$

$$٧س٢ + ٢١س - ١٦ = ٠ \quad \text{بالتجميع}$$

$$٧س٢ + ٢١س - ١٦ = ٠ \quad \text{إضافة } ١٦ \text{ في الطرفين}$$

$$٢س - ٣ = ٠ \quad \text{بالقسمة على } ٧$$

تذكر:



ضرب وحيدة حد في
كثيرة حدود

٦_٦ ضرب كثيرات الحدود

ضرب ثنائي حد

تستعمل خاصية التوزيع لضرب ثنائي حد
ويمكن ضرب ثنائي حد بإحدى الطريقتين

الطريقة الرأسية

$$\begin{array}{r} ٥+س \\ ٢+س \\ \hline ١٠+س٢ \\ ١٠+س٧+س٢ \\ \hline \end{array}$$

مثال: أوجد ناتج الضرب

$$(٥+س)(٢+س)$$

الطريقة الافقية

مثال: أوجد ناتج الضرب

$$\begin{aligned} &(٥+س)(٢+س) \\ &= (٥)(٢) + (س)(٥) + (٢)(س) + (س)(س) = \\ &= ١٠ + ٥س + ٢س + س٢ = ١٠ + ٧س + س٢ \end{aligned}$$

بجمع الحدود المتشابهة

نلاحظ انه عند ضرب عبارتين خطيتين تكون النتيجة عبارة تربيعية. العبارة التربيعية هي ذات متغير واحد من الدرجة الثانية. ونتيجة ضرب ثلاث عبارات خطية، هي عبارة من الدرجة الثالثة

طريقة التوزيع بالترتيب

هي ناتج جمع كل من: ضرب الحدود الأولى، وضرب الحدود في الطرفين، وضرب الحدود الأوسطين، وضرب الحدود الآخرين بالترتيب

$$\begin{aligned} \text{مثال: } &(٣+س)(٢+س) = (س)(س) + (س)(٣) + (٢)(س) + (٣)(٢) \\ &= س٢ + ٣س + ٢س + ٦ \\ &= س٢ + ٥س + ٦ \end{aligned}$$

يمكن استعمال خاصية التوزيع لإيجاد حاصل ضرب كثيرات حدود تحتوي على أكثر من حدين

$$\begin{aligned} \text{مثال: } &(٧+س)(٤+س) = (٧+س)(٤+س) \\ &= ٣س٢ + ٥س + ٤س + ٢٨ = ٣س٢ + ٩س + ٢٨ \\ &= ٣س٢ + ٩س + ٢٨ \end{aligned}$$

بتجميع الحدود المتشابهة.

تذكر:



ضرب ثنائي حد
باستعمال طريقة التوزيع
بالترتيب

ماذا سأتعلم!؟

- ✓ أجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما
- ✓ أجد ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما



٦_٧ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

مربع الفرق بين حدين

مربع الفرق بين حدين =

مربع الاول - ٢ X الاول X الثاني + مربع الثاني

$$(أ-ب)^2 = أ^2 - ٢أب + ب^2$$

مثال

$$(ب+٣)^2$$

$$= (ب)^2 + ٢(ب)(٣) + (٣)^2$$

$$= ب^2 + ٦ب + ٩$$

مربع مجموع حدين

مربع مجموع حدين =

مربع الاول + ٢ X الاول X الثاني + مربع الثاني

$$(أ+ب)^2 = أ^2 + ٢أب + ب^2$$

مثال

$$(٥+٣س)^2$$

$$= (٥س)^2 + ٢(٥)(٣س) + (٥)^2$$

$$= ٤س^٢ + ٣٠س + ٢٥$$

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما

= مربع الحد الاول - مربع الحد الثاني

$$(أ+ب)(أ-ب) = أ^2 - ب^2$$

مثال

$$(٤+٣د)(٤-٣د) = (٤)^2 - (٣د)^2$$

$$= ١٦ - ٩د^2$$

الفصل السابع: التحليل والمعادلات التربيعية

عنوان الدرس

تحليل وحيدات الحد

استعمال خاصية التوزيع

المعادلات التربيعية:
س^٢ + ب ص + ج = ٠

المعادلات التربيعية:
أس^٢ + ب ص + ج = ٠

المعادلات التربيعية:
الفرق بين مربعين

المعادلات التربيعية:
المربعات الكاملة

ماذا سأتعلم؟
 أحلل وعيدة الحد إلى عواملها
 أجد القاسم المشترك الأكبر
 لوعيدات الحد

٧_١ تحليل وعيدات الحد

تذكر:
 ضرب وعيدات حد
 قسمة كثيرات حدود على
 وعيدة حد



القاسم المشترك الأكبر

القاسم المشترك الأكبر: هو حاصل ضرب العوامل الأولية
 المشتركة لهذين العددين وهو أكبر عدد يكون عاملاً لهذه
 الأعداد ويرمز له بالرمز (ق.م.أ)

الصيغة التحليلية

تكون وعيدة الحد بالصيغة التحليلية إذا عبر عنها بحاصل ضرب
 أعداد أولية ومتغيرات بأس (١)
 مثال: $10x^3 = 2 \times 5 \times x^2 \times x \times x$

القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من وعيدات الحد

مثال: أوجد (ق.م.أ) لوعيدي الحد: $6x^3$ ، $18x^2$ ، $6x$
 $6x^3 = 2 \times 3 \times x \times x \times x$ احلل كل وعيدة حد تحليلياً تماماً
 $18x^2 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x$ أضع دائرة حول العوامل المشتركة
 إذن (ق.م.أ) لوعيدي الحد $6x^3$ ، $18x^2$ هو $6x^2$

إيجاد القاسم المشترك الأكبر

مثال: لدى نورة ٢٠ وردة و ٣٥ زنبقة لعمل باقات زهور فما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن عملها دون
 ترك أي زهرة؟ وما عدد زهور كل نوع في كل باقة؟

الحل: أوجد (ق.م.أ) للعددين ٢٠ و ٣٥

٥ أكتب تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية $20 = 2 \times 2 \times 5$

٥ اجد العوامل المشتركة $20 = 2 \times 2 \times 5$

أذن (ق.م.أ) للعددين ٢٠ و ٣٥ هو $5 = 10$ لذا يمكن لنورة عمل عشر باقات

وبما أن $20 = 10 \times 2$ ، $30 = 10 \times 3$ لذا فستحتوي كل باقة على ورتين و ٣ زنبق

تذكر:



إيجاد القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من وحدات الحد

٧-٢ استعمال خاصية التوزيع

ماذا سأتعلم؟
✓ كيفية استخدام خاصية التوزيع
✓ لتحليل كثيرة الحدود
✓ حل المعادلات التربيعية



$$\begin{aligned} & 27x^2 + 18x \\ & \text{نوجد القاسم المشترك الأكبر لجميع الحدود} \\ & \text{الحد الأول} = 3 \times 3 \times 3 \times x \\ & \text{الحد الثاني} = 2 \times 3 \times 3 \times x \\ & \text{القاسم المشترك الأكبر لكليهما} = 3 \times 3 \times x = 9x \\ & 27x^2 + 18x = 9x(3x + 2) \\ & = 9x(3 + 2) \end{aligned}$$

استعمال خاصية التوزيع في التحليل



التحليل بتجميع الحدود



$$\begin{aligned} & \text{حل / } 5r + 5 - r - 5 \\ & \text{نجمع الحدود ذات العوامل المشتركة} \quad (5-5) + (r-r) \\ & \text{نحلل كل تجميع باستخراج ق.م.أ.} \quad (1-1)5 + (1-1)r \\ & \text{خاصية التوزيع} \quad (1-1)(5+r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{حل / } 7k - 42 + 12k - 6k \\ & \text{جمع حدودها عوامل مشتركة} \quad (7k - 42) + (12k - 6k) \\ & \text{نحلل كل تجميع باستخراج ق.م.أ.} \quad (7-6)k + (6-6)k \\ & \quad 7k - 6 = (7-6)k \quad [(7-6)(1-1)] \\ & \text{خاصية التجميع} \quad (7-6)k - (6-6)k \\ & \text{خاصية التوزيع} \quad (7-6)(k-1) = \end{aligned}$$

التحليل بتجميع الحدود (العوامل نظائر جمعية)



حل المعادلة التالية وتحقق من صحة الحل : $x^2 = 3$

$$\begin{aligned} & x^2 = 3 \\ & x = (3-x) \cdot 0 \\ & \text{إما } x = 0 \text{ أو } x = 3 \\ & \text{إذا الجذرا هما } 3, 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{التحقق / } 0 = (0)^2 \\ & 9 = (3)^2 \end{aligned}$$



خاصية الضرب الصفري



تذكر:



ضرب ثنائيات الحد
باستعمال التوزيع

٣-٧ المعادلات التربيعية

$$س^٢ + ب س + ج = ٠$$

- ✓ أحل ثلاثية الحدود على الصورة المذكورة
- ✓ أحل معادلات على الصورة المذكورة



تحليل $س^٢ + ب س + ج$



عندما تكون ج سالبة

$$\text{حلل } / س^٢ + س٢ - ١٥ = ٠$$

$$ب = ٢، ج = -١٥$$

إذاً نبحث عن عددين حاصل

ضربهما = -١٥ وحاصل جمعهما = ٢

$$٥ = (٣-) + (٥)، -١٥ = (٣-)٥$$

إذاً العددين ٥، -٣

$$(س - ٥)(٣ + س)$$

وللتحقق نضرب العاملين

لنحصل على العبارة الأصلية



عندما تكون ب سالبة و ج موجبة

$$\text{حلل } / س^٢ - ٨ س + ١٢ = ٠$$

$$ب = -٨، ج = ١٢$$

إذاً نبحث عن عددين حاصل

ضربهما = ١٢ وحاصل جمعهما = -٨

$$٦- = (٢-) + (٦-)، ١٢ = (٢-)٦-$$

إذاً العددين -٦، -٢

$$(س - ٦)(٢ + س)$$

وللتحقق نضرب العاملين

لنحصل على العبارة الأصلية



عندما يكون ب، ج موجبين

$$\text{حلل } / س^٢ + ١٠ س + ٩ = ٠$$

$$ب = ١٠، ج = ٩ كلاهما موجبين$$

إذاً نبحث عن عددين حاصل

ضربهما = ٩ وحاصل جمعهما = ١٠

$$٩ = (١)٩، ١٠ = ١ + ٩$$

إذاً العددين ٩، ١

$$(٩ + س)(١ + س)$$

وللتحقق نضرب العاملين

لنحصل على العبارة الأصلية

حل المعادلة التربيعية بالتحليل

$$\text{حلل } / س^٢ + ٣ س - ١٨ = ٠$$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما = -١٨ وحاصل جمعهما = ٣

$$٦ = (٣-) + (٦)، -١٨ = (٣-)٦$$

إذاً العددين -٦، ٣

$$(س - ٦)(٣ + س)$$

وللتحقق نضرب العاملين

لنحصل على العبارة الأصلية

ماذا سأتعلم؟

- أحلل ثلاثية حدود على الصورة المذكورة
- أحل معادلات على نفس الصورة

٧-٤ المعادلات التربيعية

$$أس^٢ + ب س + ج = ٠$$

تذكر:

- تحليل ثلاثية حدود على الصورة
- $أس^٢ + ب س + ج = ٠$



$$\text{تحليل أس}^٢ - ب س + ج = ٠$$



$$\text{تحليل أس}^٢ + ب س + ج = ٠$$



حلل ثلاثية الحدود التاليه /

$$١ - ٥ - ٢ - ٢$$

لكي تسهل علينا عملية التحليل نضرب أ في ج لتصبح

ثلاثية الحدود على الصورة

$$١ - ٥ - ٢$$

الآن نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٣٠ وحاصل جمعهما

$$١٣$$

$$٢ = (١ -) + ٢ ، ٢ - = (١ -) + ٢$$

$$٢ - = (١) + ٢ ، ٢ - = (١) + ٢$$

$$(١ + ٥)(٢ - ٥)$$

نعيد العبارة لاصلها بقسمة العوامل العديده فقط

على قيمة أ المطعأة اصلا بالسؤال وهي ٢

$$\frac{(١ + ٥)(٢ - ٥)}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} + س(٢)$$

$$(١ + ٥٢)(١ - ٥) \leftarrow$$

حلل ثلاثية الحدود التاليه /

$$٦ + س ١٣ + س ٥$$

لكي تسهل علينا عملية التحليل نضرب أ في ج لتصبح

ثلاثية الحدود على الصورة

$$٣٠ + س ١٣ + س$$

الآن نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٣٠ وحاصل جمعهما

$$١٣$$

$$٥ = (٦) + ٥ ، ٣٠ = ٦ + ١٣$$

$$١٠ = (٣) + ٣ ، ٣٠ = ٣ + ١٠$$

$$(٣ + س)(١٠ + س)$$

نعيد العبارة لاصلها بقسمة العوامل العديده فقط

على قيمة أ المطعأة اصلا بالسؤال وهي ٥

$$\frac{(٣ + س)(١٠ + س)}{٥}$$

$$\frac{٣}{٥} + س(٥)$$

$$(٣ + س ٥)(٢ + س) \leftarrow$$

تحديد كثيرة الحدود الأولية



حلل العبارة $أس^٢ - ٣س + ٥ = ٠$ إن أمكن وإلا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب أولية؟

الحل / في ثلاثية الحدود نجد أن $أ = ٤$ ، $ب = -٣$ ، $ج = ٥$

وبما أن ب سالبة فإن حاصل جمع العددين المختارين يكون سالباً وبما أن ج موجبة فإن حاصل ضرب العددين المختارين

سيكون موجباً لذا سيكون العدداً المختارين سالبين وعند تكوين قائمة بعوامل العدد ٢٠

(حاصل ضرب أ في ج) لا نجد عاملاً من مجموعهما -٣ لذلك لا يمكن تحليل العبارة التربيعية

إذاً العبارة التربيعية المطعأة هي أولية

تذكر:



تحليل ثلاثية الحدود

٧-٥ المعادلات التربيعية (الفرق بين مربعين)

ماذا سأتعلم !؟

- ✓ أحل ثنائية حد إلى فرق بين مربعين
- ✓ أحل معادلات باستخدام الفرق بين مربعين



تطبيق التحليل
أكثر من مرة



حل / ب' - ١٦

نلاحظ ان الحدين كلاهما مربع
والاشارة بينهما سالبة
(ب - ٤)^٢

ونكتبها على الصورة
نحل الفرق بين مربعين
(ب - ٤)^٢ (ب + ٤)^٢
(ب - ٢) (ب + ٢) (ب + ٤)

تحليل الفرق
بين مربعين



حل / ج' - ٨١

نلاحظ ان الحدين كلاهما مربع
والاشارة بينهما سالبة
٩ - ج'^٢

إذاً يمكن تطبيق قانون الفرق بين مربعين
نحل حسب قانون الفرق بين مربعين
(٩ - ج') (٩ + ج')

حل معادلة
بالتحليل



مالقيمة الموضبة ل سن التي تحقق المعادلة

$$\text{سن} = \text{سن}^2 - \frac{9}{16} \text{ إذا كانت سن} = 0$$

نعوض عن سن ب (صفر) ثم نحل المعادلة

$$0 = \text{سن}^2 - \frac{9}{16}$$

$$\text{سن}^2 = \left(\frac{3}{4} \right)^2$$

$$0 = \left(\frac{3}{4} - \text{سن} \right) \left(\frac{3}{4} + \text{سن} \right)$$

$$\text{إما سن} = \frac{3}{4} \text{ أو } \text{سن} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{سن} = \frac{3}{4} \text{ ، } \text{سن} = -\frac{3}{4}$$

تطبيق طرق
مختلفة



حل / ٥ سن^٥ - ٤٥

$$0 = \text{سن} (\text{سن}^4 - 9)$$

نأخذ ٥ سن عامل مشترك

ونكتب سن^٤ - ٩ على صورة أ' - ب'

$$0 = \text{سن} [\text{سن}^2 (٣) - (٣)^2]$$

$$0 = \text{سن} (\text{سن} - ٣) (٣ + \text{سن})$$

لاحظ ان سن^٢ - ٣ ليس فرقاً بين مربعين

لان ٣ ليس مربعاً كاملاً

ماذا سأتعلم؟!

- تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل
- حل معادلات تتضمن مربعات كاملة



٥-٧ المعادلات التربيعية (المربعات الكاملة)

تذكر:



(ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما)

التحليل التام



حلل كلاً من كثيرات الحدود التالية:
٥^٢ - ٨٠

نحلل باستفراج ق.م.أ.

$$٥^٢ - ٨٠ = (٥ - ٤)(٥ + ٤)$$

$$٥ = ٥ - ٠$$

$$٥^٢ - ٨٠ = (٥ - ٤)(٥ + ٤)$$

نلاحظ ان عدد الحدود اثنان وتشكل فرق بين مربعين

$$٥ = (٥ - ٤)$$

$$٥ = (٥ - ٤)(٥ + ٤)$$

تمييز ثلاثية الحدود

التي تشكل مربع كامل وتحليلها



حدد ما إذا كانت ثلاثية حدود التالية تشكل مربعاً كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلها
٤^٢ + ١٢^٢ + ٩

× هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، ٤^٢ = (٢^٢)^٢

× هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، ٩ = ٣^٢

× هل الحد الأوسط = ٢(٢^٢)(٣)؟ نعم، ١٢ = ٢(٢^٢)(٣)

× بما أنه تحققت الشروط الثلاثة إذا العبارة تشكل مربع كامل

$$٤^٢ + ١٢^٢ + ٩ =$$

$$= (٢^٢ + ٣)^٢$$

$$= (٣ + ٤)^٢$$

استعمال خاصية الجذر التربيعي



حلل المعادلة (٦ - ص)^٢ = ٨١

لحذف التربيع نأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{(٦ - ص)^٢} = \sqrt{٨١} \quad \times \text{ الجذر يلغي التربيع}$$

$$٦ - ص = \pm ٩$$

$$ص = ٦ \pm ٩$$

$$ص = ٦ + ٩ \quad \text{أو} \quad ص = ٦ - ٩$$

$$ص = ١٥ \quad \text{أو} \quad ص = -٣$$

الجذران هما ١٥، -٣

حل معادلات تتضمن عوامل مكررة



حلل المعادلة ٩^٢ - ٤٨^٢ = ٦٤

$$٩^٢ - ٤٨^٢ = ٦٤ + ٦٤$$

$$٠ = ٦٤ + ٤٨^٢ - ٩^٢$$

يتضح لنا أنها ثلاثية حدود تمثل مربع كامل

$$= (٣ - ٨) + (٨)(٣) - (٨)$$

(نأخذ جذر الأول وإشارة الأوسط وجذر الثاني)

$$٠ = (٨ - ٣)$$

$$٠ = (٨ - ٣)(٨ - ٣)$$

تغذية راجعة مهمة لتحليل وحل كثيرات الحدود

تحليل ثنائية الحد وطرق حلها

تحليل ثنائية الحد

القاسم المشترك الأكبر

القاسم المشترك الأكبر + الفرق بين مربعين

الفرق بين مربعين

تكرار القانون أكثر من مرة

$5س^5ص - 10س^4ص^2$
 نأخذ
 $5س$ عامل مشترك
 $5س(ص - 2ص^2)$

$$\begin{array}{c}
 20 - 2س \\
 | \quad | \\
 (0)(0) - (س)(س) \\
 \\
 (0+س)(0-س) =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 32 - 2س^2 \\
 | \quad | \\
 (16)2 - (س^2)2 \\
 (16 - س^2)2 \\
 (4 - س^2)2 \\
 (4+س)(4-س)2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 1 - 4س \\
 | \quad | \\
 (1)(1) - (س)(س) \\
 (1 - س^2) \\
 (1 - س)(1 + س) \\
 (1 - س^2) \\
 (1 - س)(1 + س) \\
 (1 + س)(1 - س)(1 + س)
 \end{array}$$

ملاحظة هامة /

ثنائية الحد $(س^2 + 9)$ أولية بينما ثنائية الحد $(س^2 - 9)$ ليست أولية لأنه يمكن حلها بالفرق بين مربعين

ثنائية الحد $(2س^2 + 18)$ ليست أولية لأنه يوجد قاسم مشترك $2(س^2 + 9)$

مقتبس من كتاب مهارات أساسيه في الرياضيات قبل المرحلة الثانوية للأستاذة / رفته العرجاني

تغذية راجعة مهمة لتحليل وحل كثيرات الحدود

تحليل ثلاثة الحد وطرق حلها

تحليل ثلاثة الحدود

على الصورة

$$أس^٢ + ب س + ج$$

$$١٠س^٢ - ٣س - ٣٠$$

الطريقة الاولى :

نضرب أ في الحد الثابت ليكون معامل س

$$١ =$$

$$٣٠ - س - ٣٠$$

نبحث عن عددين حاصل ضربهم -٣٠

وحاصل جمعهم -١

$$٣٠ - = (٥)(٦ -)$$

$$١ - = ٥ + ٦ -$$

$$(٥ + س) (٦ - س)$$

نعيدھا لاصلھا بقسمة الثوابت على أ

ثم نبسطھا فتصبح على الصورة

$$(١ + س٢)(٣ - س٥)$$

$$١٥س + ٧س - ٢$$

الطريقة الثانية : ١٥(٢ -) = ٣٠ -

ابحث عن عددين حاصل ضربهم -٣٠

وحاصل جمعهم ٧

$$٣٠ - = (٣ -)١٠$$

$$٧ = ٣ - ١٠$$

$$١٥س - ٣س + ١٠س - ٢$$

$$٣س(١ - س٥) + ٢(١ - س٥)$$

$$(١ - س٥)(٢ + س٣)$$

على الصورة

$$س^٢ + ب س + ج$$

$$س^٢ + ٧س + ٦$$

ابحث عن عددين

حاصل ضربهم ٦

وحاصل جمعهم ٧

$$٦ = (٦)(١)$$

$$٧ = ٦ + ١$$

$$= (٦ + س) (١ + س)$$

$$س^٢ - ٣س - ٢٨$$

ابحث عن عددين

حاصل ضربهم -٢٨

وحاصل جمعهم ٣ -

$$٢٨ - = (٤)(٧ -)$$

$$٣ - = ٤ + ٧ -$$

$$= (٤ + س) (٧ - س)$$

القاسم المشترك

الأكبر

$$٧س^٢ + ١٤س + ٢١ = ٧س(س + ٢) + ٢١(س)$$

$$(٧س)(س) + (٢١)(س)$$

$$(٧س)(٣) + (٢١)(س)$$

$$(س)(س)$$

$$= ٧س(س + ٣) + ٢١(س)$$

مقتبس من كتاب مهارات أساسيه في الرياضيات
قبل المرحلة الثانوية للأستاذة / رفعة العرجاني

تغذية راجعة مهمة لتحليل وحل كثيرات الحدود

تحليل رباعية الحدود وطرق حلها

تحليل رباعية الحدود

تحليل بجمع النظار

تحليل بالتجميع

$$\begin{aligned}
 & 4x^2 + 8x + 2 \\
 & 4x^2 + 2x + (2)(2)(2) + (2)(2)(2) + 2x + 2 \\
 & 4x^2 + 2x + 1 + (2+2)x + 4 \\
 & (2x+1)(2x+2)
 \end{aligned}$$

$$10x^2 - 50x + 5$$

الطريقة الأولى

$$\begin{aligned}
 & 10x^2 - 50x + 5 \\
 & (10x - 5) + (-50x + 5) \\
 & 10x(1 - 5x) - 5(1 - 5x) \\
 & (10x - 5)(1 - 5x)
 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية

$$\begin{aligned}
 & 10x^2 - 50x + 5 \\
 & 10x(1 - 5x) - 5(1 - 5x) \\
 & (10x - 5)(1 - 5x)
 \end{aligned}$$

مقتبس من كتاب مهارات أساسيه في الرياضيات قبل المرحلة الثانوية للأستاذ / رفعة العرجاني